

JÚLIO GOMES

**ESTIMATIVA DE PARÂMETROS DE MODELOS  
HIDROLÓGICOS UTILIZANDO O MÉTODO  
DO FILTRO DE KALMAN**

Dissertação apresentada como requisito  
parcial à obtenção do grau de Mestre.  
Curso de Pós-Graduação em Engenharia  
Hidráulica do Setor de Tecnologia da  
Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Ruy Sant'Ana

Co-orientadora: Prof.<sup>a</sup> Miriam Rita Moro Mine

**CURITIBA**

**1995**

JÚLIO GOMES

ESTIMATIVA DE PARÂMETROS DE  
MODELOS HIDROLÓGICOS UTILIZANDO  
O MÉTODO DO FILTRO DE KALMAN

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de mestre.

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Hidráulica do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Ruy Sant'Ana

Co-orientadora: Profa. Miriam Rita

Moro Mine

Curitiba

1995

ESTIMATIVA DE PARÂMETROS DE MODELOS HIDROLÓGICOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DO FILTRO DE KALMAN

POR

JÚLIO GOMES

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Hidráulica do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná pela comissão formada pelos Professores:

Orientador:



Prof. Ruy Sant'ana  
Setor de Tecnologia, UFPR

Membros:



Prof. Carlos Eduardo Morelli Tucci  
Instituto de Pesquisas Hidráulicas, UFRGS



Prof. Heinz Dieter Fill  
Setor de Tecnologia, UFPR

Curitiba, 19 de outubro de 1995

Aos meus pais

José Gomes

e

Luzia Tita de Almeida Gomes

Aos meus irmãos Braúlio, Amélia e Bel.

O enriquecimento teórico e o incentivo ao desenvolvimento de uma vida profissional responsável e digna são os maiores frutos da minha experiência como aluno do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Hidráulica. Às pessoas que contribuíram de forma expressiva para o alcance deste estágio na minha vida acadêmica agradeço, em especial:

Profa. Miriam Rita Moro Mine, pela orientação desta dissertação e pela paciência, incentivo e vida acadêmica.

Prof. Ruy Sant'Ana, pela orientação desta dissertação.

Aos professores do CEHPAR/UFPR, pela transmissão do conhecimento teórico e prático durante o transcorrer do curso.

Aos amigos do Curso de Pós-Graduação pela convivência e apoio.

Aos amigos do ISAM/PUC-PR pelo incentivo e cobrança.

À Pontifícia Universidade Católica do Paraná, na pessoa do Reitor Prof. Euro Brandão, pelo apoio e pela confiança na palavra empenhada.

Maria de Lourdes Machosky e Wally Schick Martins pelo trabalho incansável e atencioso no levantamento de informações e na padronização das referências bibliográficas.

Pedro Bruno Mrosk Jr. e Antônio Carlos Mariano pelo esmero e detalhe na confecção dos originais das figuras incluídas nesta dissertação.

Nélia Maria Moulin Louzada de Carrasco pelo incansável e criterioso trabalho na padronização do texto que compõem a presente dissertação.

A todas pessoas que, em algum dado momento, fizeram parte da minha história, anônimas neste agradecimento, mas de nome impresso em minha memória e em meu coração.

## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
2.1	MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESCOAMENTO SUPERFICIAL.....	9
2.1.1	Teoria do Hidrograma Unitário.....	13
2.2	MODELOS ESTOCÁSTICOS.....	17
2.2.1	Filtro Linear.....	18
2.2.2	Modelos Autoregressivos.....	20
2.2.3	Modelos de Médias Móveis.....	21
2.2.4	Modelos Autoregressivos e Médias Móveis.....	22
2.2.5	Modelos Autoregressivos Integrados Médias Móveis.....	23
3	FILTRO DE KALMAN.....	26
3.1	MODELOS DINÂMICOS DE ESTADO.....	27
3.2	DERIVAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO (Sistemas Lineares Gaussianos).....	33
3.2.1	Propagação de Erros.....	34
3.2.2	Matriz de Ganho ( $K_t$ ).....	38
3.3	CÁLCULO DAS ESTATÍSTICAS DESCONHECIDAS.....	40
3.3.1	Propriedades da Inovação.....	40

3.3.2 Estimativa das Estatísticas Desconhecidas.....	42
3.4 ESTIMATIVA DO ESTADO INICIAL.....	45
3.5 ESTIMATIVA DAS ORDENADAS DO HIDROGRAMA UNITÁRIO COM BASE NO FILTRO DE KALMAN.....	46
3.5.1 Procedimento para Correção das Ordenadas do Hidrograma Unitário.....	49
3.6 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO COM BASE NO FILTRO DE KALMAN.....	50
3.6.1 Procedimento para Correção dos Parâmetros do Modelo Autoregressivo.....	53
3.7 ESTATÍSTICA UTILIZADA PARA A AVALIAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN.....	55
<b>4 CARACTERIZAÇÃO DA BACIA HIDROGRÁFICA E DADOS UTILIZADOS.....</b>	<b>57</b>
4.1 RIO JANGADA.....	57
4.2 DADOS DISPONÍVEIS.....	59
4.3 CARACTERIZAÇÃO DOS EVENTOS.....	60
4.4 DETERMINAÇÃO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL.....	61
<b>5 RESULTADOS DA PREVISÃO DOS MODELOS COM O USO DO FILTRO DE KALMAN.....</b>	<b>64</b>
5.1 ESTIMATIVA DAS ORDENADAS DO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	65
5.1.1 Estimativa Inicial do Hidrograma Unitário.....	66
5.1.2 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e sem Restrições.....	68
5.1.3 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições.....	70

5.1.4 Algoritmo do Filtro de Kalman com Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições.....	72
5.1.5 Comparação das Estimativas de Vazão pelo Hidrograma Unitário usando o Filtro de Kalman.....	75
5.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO.....	83
5.2.1 Estimativa Inicial dos Parâmetros do Modelo Autoregressivo.....	83
5.2.2 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e sem Restrições.....	85
5.2.3 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições.....	87
5.2.4 Algoritmo do Filtro de Kalman com Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições.....	90
5.2.5 Comparação das Estimativas de Vazão pelo Modelo Autoregressivo usando o Filtro de Kalman.....	93
6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	101
APÊNDICE 1 - Dados Hidrológicos Utilizados.....	111
APÊNDICE 2 - Estimativas Obtidas com o Hidrograma Unitário.....	120
APÊNDICE 3 - Estimativas Obtidas com o Modelo Autoregressivo.....	124
APÊNDICE 4 - Programas Computacionais.....	128
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	176



## LISTA DE TABELAS

4.1	CARACTERÍSTICAS DOS EVENTOS SELECIONADOS.....	61
5.1	ESTIMATIVA INICIAL DO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	67
5.2	VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA R = 0,01. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.....	69
5.3	VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA Q/R = 0. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.....	69
5.4	VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA R = 0,01. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	71
5.5	VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA Q/R = 0. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	71
5.6	VALORES DOS RUÍDOS w E v E DAS MATRIZES DE COVA- RIÂNCIA Q E R APÓS CADA EVENTO. FILTRO DE KALMAN COM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVA- RIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	74
5.7	VALORES DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (m³/s) PARA EVENTOS 11 A 15 COM ESTIMATIVAS FEITAS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	76

5.8	ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTO- REGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA $R = 0,01$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.....	86
5.9	ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTO- REGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA $Q/R = 0$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.....	86
5.10	ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTO- REGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA $R = 0,01$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	88
5.11	ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTO- REGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA $Q/R = 0$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	89
5.12	VALORES DOS RUÍDOS $w$ E $v$ E DAS MATRIZES DE COVA- RIÂNCIA $Q$ E $R$ APÓS CADA EVENTO. FILTRO DE KALMAN COM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVA- RIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.....	92
5.13	VALORES DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO ( $m^3/s$ ) PARA EVENTOS 11 A 15 COM ESTIMATIVAS FEITAS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....	94

## LISTA DE FIGURAS

2.1	HIDROGRAMAS DE ESCOAMENTO SUPERFICIAL E SUBTERRÂNEO.....	14
2.2	REPRESENTAÇÃO DE UMA SÉRIE TEMPORAL COMO RESULTADO DA OPERAÇÃO DE UM FILTRO LINEAR.....	20
2.3	DIAGRAMA DE BLOCOS REPRESENTATIVO DE UM MODELO ARIMA.....	25
3.1	PROCEDIMENTO DO SISTEMA DE MEDIDA E ESTIMATIVA.....	29
3.2	DIAGRAMA DE BLOCOS REPRESENTATIVO DA OPERAÇÃO DE UM FILTRO DE KALMAN DISCRETO.....	45
3.3	DOMÍNIO DE VALIDADE DOS PARÂMETROS $\phi_1$ E $\phi_2$ PARA UM MODELO AUTOREGRESSIVO DE ORDEM 2.....	54
4.1	BACIA HIDROGRÁFICA DO RIO JANGADA E ESTAÇÕES HIDRO- MÉTRICAS UTILIZADAS.....	58
5.1	EVENTO 11. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	78
5.2	EVENTO 12. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	79
5.3	EVENTO 13. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	80
5.4	EVENTO 14. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	81
5.5	EVENTO 15. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	82
5.6	EVENTO 11. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADO PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....	96

5.7 EVENTO 12. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E  
ESTIMADO PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....97

5.8 EVENTO 13. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E  
ESTIMADO PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....98

5.9 EVENTO 14. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E  
ESTIMADO PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....99

5.10 EVENTO 15. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E  
ESTIMADO PELO MODELO AUTOREGRESSIVO.....100

## LISTA DE SÍMBOLOS

B = operador **backward shift**;

E = erro;

E[variável] = valor esperado da variável;

H = matriz de transição;

K = matriz de ganho;

I = precipitação (capítulo 2); matriz identidade (capítulo 3);

P = matriz de covariância dos erros de estimativa;

Q = vazão (capítulo 2); matriz de covariância dos erros de modelagem (capítulos 3, 5 e 6);

R = matriz de covariância dos erros de observação;

REQM = raiz do erro quadrático médio;

S = operador soma;

$S_f$  = declividade da linha de fricção;

$S_o$  = declividade do fundo do canal;

T (sobrescrito) = indica matriz transposta;

U = velocidade média do escoamento na seção transversal;

X = entrada ou **input** de um modelo estocástico;

Y = saída ou **output** de um modelo estocástico;

a = ruído branco;

d = grau de diferenciação da série temporal;

e = base do logaritmo natural;

est (subscrito) = indica valor estimado;

g = aceleração da gravidade;

$h$  = ordenada do hidrograma unitário;  
 $h_e$  = altura pluviométrica efetiva ou altura excedentária;  
 $k$  = parâmetro do reservatório linear;  
 $obs$  (subscrito) = indica valor observado;  
 $p$  = ordem do modelo autoregressivo;  
 $q$  = ordem do modelo de médias móveis (capítulo 2); vazão  
 (capítulos 3, 4 e 5);  
 $q_l$  = vazão de contribuição lateral;  
 $q_p$  = vazão de pico do hidrograma unitário;  
 $s$  = armazenamento;  
 $t$  = tempo;  
 $t/t-1$  (subscrito) = indica previsão de uma quantidade no  
 tempo  $t$  a partir de seu valor no tempo  
 $t-1$ ;  
 $t/t$  (subscrito) = indica atualização de uma quantidade no  
 tempo  $t$  à medida que uma nova informação  
 no tempo  $t$  é obtida;  
 $u$  = precipitação efetiva;  
 $v$  = ruído de observação;  
 $v_l$  = componente longitudinal da velocidade de escoamento da  
 contribuição lateral;  
 $x$  = distância na direção longitudinal (capítulo 2); estado do  
 sistema (capítulo 3);  
 $w$  = série obtida pela diferenciação do processo aleatório  $z$   
 (capítulo 2); ruído do sistema (capítulos 3, 5 e 6);

$y$  = profundidade do escoamento;  
 $z$  = processo aleatório (capítulo 2); observação do estado do sistema (capítulo 3);  
 $\Gamma$  = matriz de transição;  
 $\theta(B)$  = operador linear do modelo de médias móveis;  
 $\phi(B)$  = operador linear do modelo auto regressivo;  
 $\alpha$  = constante de depleção do escoamento subterrâneo;  
 $\Delta t$  = intervalo de tempo;  
 $\mu$  = média;  
 $v$  = inovação;  
 $\sigma$  = variância;  
 $\phi$  = matriz de transição de estado;  
 $\theta_1, \theta_2, \dots$  = parâmetros do modelo de médias móveis;  
 $\phi_1, \phi_2, \dots$  = parâmetros do modelo autoregressivo;  
 $\psi_1, \psi_2, \dots$  = parâmetros do filtro linear;  
 $\nabla$  = operador backward difference;  
 $\sim$  (sobrescrito) = indica desvio em relação à média (capítulos 2, 3 e 5); indica erro de estimativa (capítulo 3);  
 $\wedge$  (sobrescrito) = indica valor estimado;  
 $\_$  (sobrescrito) = indica valor médio.

## RESUMO

A operação em tempo real de sistemas de recursos hídricos, destinados a usos múltiplos, como: controle de cheias, regularização do escoamento através de estruturas hidráulicas, geração de energia elétrica, navegação, abastecimento de água, gerência de qualidade de água, pode diminuir de forma significativa os custos e reduzir os riscos, quando as previsões de vazões são feitas com segurança, a curtos intervalos de tempo e continuamente. O procedimento para previsão de vazões requer, em adição aos modelos utilizados para a estimativa das vazões futuras, um método de correção contínua das previsões a partir dos erros observados nas estimativas anteriores. A presente dissertação teve por objetivo avaliar a utilização de um algoritmo de filtragem de erros, **Filtro de Kalman**, na estimativa e atualização em tempo real de parâmetros de modelos hidrológicos clássicos. Utilizou-se o hidrograma unitário e o modelo autoregressivo aplicados à bacia do rio Jangada, afluentes do rio Iguaçu, com área de drenagem de 1050 Km<sup>2</sup>. Descreve-se dois algoritmos distintos do **Filtro de Kalman** em um sentido crescente de generalidade. Os resultados apresentados indicaram a necessidade de se impor restrições aos valores dos parâmetros para garantir a convergência para valores aceitáveis de acordo com a teoria dos modelos hidrológicos utilizados. Conclui-se que o **Filtro de Kalman** é útil na construção de modelos hidrológicos para previsão de vazões de enchente com correção dos parâmetros em tempo real.



## ABSTRACT

Real time operation of water resources systems destined to multi-purpose uses, such as prevention of floods, regulation of runoff through hydraulic structures, hydroelectric power generation, inland navigation, water supply and water quality management, can improve cost-effectiveness and reduce risks, when forecasting of flows are made with reliability, in short time intervals and in continuous form. Operational forecasting procedures require, in addition to hydrological models, a method for the continuous correction of the forecast from the observed error in earlier forecasts. This dissertation deals with evaluating the use of a filtering algorithm, **Kalman Filter**, in real time estimative and correction of classical hydrologic models parameters. The Unit Hydrograph and Autoregressive Model were used, applied to Jangada river basin, with a drainage area of 1050 Km<sup>2</sup>. Two different algorithms of **Kalman Filter** were described in a crescent level of generality. The results showed the necessity to impose restrictions to values of the models parameters to guarantee the convergence to acceptable values according to theory of the hydrologic models used in this dissertation. It concludes that **Kalman Filter** is useful to formulate hydrologic models to flood forecasting with real time correction of the model parameters.

## 1 INTRODUÇÃO

Na operação contínua de sistemas de recursos hídricos, a previsão de vazões é extremamente importante para estabelecer estratégias de projeto e controles ótimos. Este fato justifica a considerável atenção que é dada ao controle de tais sistemas em tempo real.

Entende-se por previsão de vazões em tempo real, aquela que é feita para um dado horizonte de tempo, que pode ser de poucas horas para vazões de enchentes de uma bacia com resposta rápida, de poucos dias para abastecimento de água, e até um ou mais meses no caso de sistemas subterrâneos, de tal forma a se ter um controle de decisão. Durante o intervalo de previsão, o dado é coletado e processado, a fim de que novas previsões possam ser feitas e o controle modificado.

A operação em tempo real de sistemas de recursos hídricos, destinados a múltiplos usos, como: controle de cheias, regularização do escoamento através de estruturas hidráulicas, geração de energia elétrica, navegação, abastecimento de água, gerência de qualidade de água, pode diminuir de forma significativa os custos e reduzir os riscos, quando as previsões de vazões são feitas com segurança, a curtos intervalos de tempo e continuamente.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas para solucionar esse problema prático, e muitos pontos básicos necessitam ainda de

maiores estudos, como por exemplo, as características não lineares, espaciais e estocásticas dos sistemas de recursos hídricos, que causam dificuldade na implantação de algoritmos de solução, impossibilitando uma previsão ótima.

Normalmente utiliza-se modelos capazes de produzir estimativas de valores futuros das vazões. De forma geral, esses modelos podem ser classificados em determinísticos e estocásticos. Nos modelos determinísticos, procura-se reproduzir os processos físicos que relacionam chuva e vazão, para se prever a vazão a partir de previsões de precipitação. Nos modelos estocásticos, é a própria estrutura de dependência da série de vazões que é utilizada na previsão, conforme em BRAGA (1981).

Segundo NASH e SUTCLIFFE (1970), o procedimento para previsão de vazões requer, em adição aos modelos utilizados para estimativa das vazões futuras, um método de correção contínua das previsões a partir dos erros observados nas estimativas anteriores.

Neste contexto, insere-se o objetivo da presente dissertação que é o de avaliar a utilização de um método de filtragem de erros, **Filtro de Kalman**, na estimativa de parâmetros de modelos hidrológicos, tendo como características principais: flexibilidade, recursividade e correção dos parâmetros em tempo real, isto é, a medida em que uma nova observação é realizada.

A estimativa e correção dos parâmetros dos modelos hidrológicos em tempo real deu origem aos modelos chamados **adaptivos**. De

modo simples, os modelos adaptivos são aqueles cujos parâmetros são reavaliados no instante em que uma nova informação hidrológica é obtida.

O uso de procedimentos numéricos para a obtenção de modelos adaptivos é relativamente recente. Atualmente, a aplicação dos conceitos de **modelos dinâmicos de estado** e do **Filtro de Kalman** tem atraído considerável atenção em hidrologia. Estas técnicas tem origem, principalmente, na teoria de controle, tendo sido seu potencial utilizado por hidrólogos para previsão e controle em tempo real.

Uma das características principais da modelagem matemática, utilizando-se o conceito de **modelos dinâmicos de estado**, é a possibilidade de representação de diferentes sistemas hidrológicos. Tal representação é baseada em um sistema composto por duas equações fundamentais: **equação de estado do sistema** e **equação de mensuração**.

A teoria inicial sobre o **Filtro de Kalman** foi introduzida no campo da engenharia de controle por KALMAN (1960) e KALMAN E BUCY (1961). Desde então, sua aplicação tem se estendido às mais variadas áreas do conhecimento tecnológico, principalmente no campo da engenharia aeroespacial, tendo, por exemplo, desempenhado importante papel na implementação do Programa Apollo.

Descreve-se a seguir, um panorama geral dos capítulos que integram esta dissertação.

O Capítulo 2 trata de uma breve revisão bibliográfica, incluindo os conceitos relativos aos modelos hidrológicos utilizados, apresentando definições e hipóteses relativas à Teoria do Hidrograma Unitário e Modelos Autoregressivos.

O Capítulo 3 apresenta o método do Filtro de Kalman, no qual são definidas as principais características do filtro. A abordagem adotada nesta dissertação segue a conceituação de **modelos dinâmicos de estado**, onde o sistema físico real é representado através da equação de estado do sistema e da equação de mensuração.

Por definição, o estado do sistema é representado por uma variável de estado corrompida por um erro (ruído) de modelagem, sendo que o estado do sistema é reavaliado a cada instante de tempo. A atualização do estado do sistema é realizada a partir do instante em que uma nova observação, corrompida por um erro (ruído) de observação, é realizada.

São destacados o algoritmo apresentado por KALMAN (1960), onde os ruídos do sistema real e as respectivas matrizes de covariância não são corrigidos e um algoritmo apresentado por TODINI, O'CONNELL e JONES (1980), onde os ruídos do sistema real e suas respectivas matrizes de covariância são corrigidos à medida em que uma nova observação é obtida.

Descreve-se, também, a representação do hidrograma unitário e do modelo autoregressivo, modelos clássicos em hidrologia, segundo o conceito de **modelos dinâmicos de estado**.

No caso da obtenção das ordenadas do hidrograma unitário, sugere-se um procedimento para garantir a não negatividade das ordenadas e o volume unitário equivalente a uma altura pluviométrica efetiva de 10 mm, enquanto que para o modelo autoregressivo, sugere-se um procedimento para garantir os valores dos parâmetros do modelo dentro dos limites apresentados em BOX e JENKINS (1976).

O Capítulo 4 apresenta de maneira resumida as características físicas da bacia hidrográfica do rio Jangada cujos dados de precipitação e vazão foram utilizados na aplicação do Filtro de Kalman. Descreve-se, também, o tratamento dos dados de precipitação e vazão com o objetivo de determinação da precipitação efetiva e de separação dos escoamentos superficial e subterrâneo.

O Capítulo 5 apresenta a aplicação dos dois algoritmos de filtragem descritos no Capítulo 3, utilizando-se os dados de precipitação e vazão do rio Jangada, afluente do rio Iguaçu, no estado do Paraná. A avaliação do desempenho dos dois algoritmos de filtragem é feita, a partir da análise da raiz do erro quadrático médio (REQM), calculada considerando-se a diferença entre os valores de vazão observados e estimados.

O Capítulo 6 tece comentários sobre conclusões e recomendações, a partir da análise do desempenho do Filtro de Kalman na construção de modelos com correção de parâmetros em tempo real. Finalmente, são apresentados os apêndices, contendo os dados utilizados, os resultados obtidos e os programas computacionais implementados, e as referências bibliográficas

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo faz-se uma breve revisão da literatura relacionada à previsão de vazões em tempo real, no que se refere à utilização do **Filtro de Kalman** na construção de modelos com correção e atualização dos parâmetros em tempo real, isto é, à medida em que uma nova informação é obtida. Procura-se, também, apresentar conceitos relativos à teoria do hidrograma unitário e dos modelos autorregressivos, utilizados nesta dissertação em conjunto com o **Filtro de Kalman**.

Um dos problemas mais importantes na hidrologia aplicada é a determinação da vazão a partir de dados meteorológicos, principalmente com base em registros de precipitação. Segundo KITADINIS e BRAS (1978), os hidrólogos frequentemente enfrentam esta questão de acordo com duas importantes classes de aplicações.

A primeira classe de aplicações requer a estimativa de valores de vazão sem relação com o tempo real. A variável tempo geralmente é representada por um valor de probabilidade de ocorrência, mais comumente referida como tempo de retorno ou recorrência. Um exemplo característico é a estimativa de vazão a partir de eventos extremos de precipitação.

Uma segunda classe de aplicações está relacionada à operação em tempo real de sistemas de recursos hídricos, destinados a múltiplos usos, como: controle de cheias, regularização do escoamento

através de estruturas hidráulicas, geração de energia elétrica, navegação, abastecimento de água, gerência de qualidade de água, entre outros.

Citando-se novamente NASH e SUTCLIFFE (1970), na prática o procedimento para previsão de vazões requer, em adição aos modelos utilizados para estimativa das vazões futuras, um método de correção contínua das previsões a partir dos erros observados nas estimativas anteriores. Destacando que deste modo, a informação sobre a condição do sistema contida nas medições recentes de vazão podem ser utilizadas.

O uso de procedimentos numéricos para a obtenção de modelos hidrológicos adaptivos, isto é, com correção e atualização dos parâmetros em tempo real, é relativamente recente. Estudos iniciados no Reino Unido em 1967, impulsionados pelo Dee Research Programme, conforme citado em CLARKE (s.d.), tiveram por objetivo investigar métodos de gerenciamento, modelagem matemática e aquisição remota de dados, que pudessem ser combinados para a operação mais eficiente de sistemas de recursos hídricos.

Particularmente no que se refere a utilização do Filtro de Kalman, nas últimas décadas, várias pesquisas tem sido publicadas mostrando a sua aplicação na engenharia de recursos hídricos.

HINO (1973) apresenta uma aplicação do Filtro de Kalman para a previsão de vazões em tempo real e que permite a determinação das ordenadas do hidrograma unitário. WOOD e SZOLLOSI-NAGY (1978) usa-



ram o Filtro de Kalman para a previsão de vazões com 6h de antecedência para o rio Ombrone, Itália. CHIU (1978), citado por BERGMAN e DELLEUR (1985a), apresenta uma descrição do estado da arte na utilização de modelos dinâmicos de estado e do Filtro de Kalman nas áreas de hidrologia, hidrogeologia, qualidade de água e hidráulica.

Aplicações na previsão e controle em tempo real são descritas em O'CONNELL (1980) e pesquisas relacionadas à implementação do Filtro de Kalman associado a modelos hidrológicos conceituais são descritas por KITADINIS e BRAS (1980a,1980b).

Em trabalhos mais recentes, COOPER (1982) usou técnicas de aproximação estocástica para estimativa on line de parâmetros de modelos não lineares e PATRY e MARINO (1984) analisaram a identificação de parâmetros para modelos de previsão de vazões em tempo real com aplicações na hidrologia urbana. KITADINIS, LARA e LANE (1984) avaliaram, através da utilização do Filtro de Kalman, diferentes estratégias de coleta de dados de vazões e BRAS e RODRIGUEZ-ITURBE (1985) apresentam um resumo da aplicação do Filtro de Kalman na estimativa de sistemas hidrológicos dinâmicos.

Prosseguindo nos exemplos de aplicações em hidrologia, BERGMAN e DELLEUR (1985a,1985b) utilizaram o Filtro de Kalman para previsões de vazões diárias para o rio Potomac em Maryland, USA, enquanto GEORGAKAKOS (1986) utilizou o Filtro de Kalman na construção de um modelo hidrometeorológico estocástico para previsão de vazões de enchente em tempo real na bacia de Bird Creek em Oklahoma, USA.

Aplicações do Filtro de Kalman na análise e projeto de redes de monitoramento de águas subterrâneas são descritas por GEER (1987). KUO et alii (1990) desenvolveram e aplicaram um modelo estocástico para operação em tempo real de reservatórios na bacia do rio Tanshui, República da China, utilizando o Filtro de Kalman para atualização das previsões de vazão.

Como percebe-se, através do exposto, o Filtro de Kalman tem sido utilizado como ferramenta para a construção de modelos para estimativa de parâmetros e previsão de variáveis hidrológicas em tempo real, tendo como característica a flexibilidade na representação de diferentes modelos utilizados em hidrologia. Na seqüência apresenta-se alguns conceitos básicos relativos à teoria do hidrograma unitário e dos modelos autoregressivos, utilizados nesta dissertação em conjunto com o método do Filtro de Kalman.

## 2.1 MODELOS DETERMINÍSTICOS DE ESCOAMENTO SUPERFICIAL

Os modelos matemáticos determinísticos utilizados em hidrologia podem ser subclassificados em lineares e não-lineares. Os modelos lineares se baseiam na teoria do hidrograma unitário e nas diferentes formas de se estimar as ordenadas que o definem. Estes modelos tem sido os mais utilizados devido à sua facilidade de formulação e cálculo. Na seqüência são citados, de modo bem resumido, alguns exemplos de modelos lineares.

**Reservatório Linear Simples:** Utiliza a equação da continuidade, representada pela Equação 2.1, associada a uma equação de armazenamento, expressa pela Equação 2.2.

$$\frac{ds}{dt} = I - Q \quad (2.1)$$

$$s = kQ \quad (2.2)$$

onde:  $s$  = volume de armazenamento;

$I$  = precipitação (input do sistema);

$Q$  = vazão de saída;

$k$  = parâmetro do modelo.

Verifica-se na Equação 2.2, uma relação linear entre o armazenamento  $s$  e a vazão de saída  $Q$ . O modelo será classificado como não linear, no caso de adotar-se para a relação entre  $s$  e  $Q$ , uma função não linear.

**Método de Nash:** Representa o escoamento superficial por uma série de reservatórios lineares em cascata. Cada reservatório produz o efeito de armazenamento utilizando a relação linear do modelo anterior, Equação 2.2, considerando-se o parâmetro  $k$  igual para todos os reservatórios.

**Método de Clarke:** Combina o modelo de reservatório linear simples com o histograma tempo-área, com a finalidade de levar em conta os efeitos de translação e armazenamento. A precipitação é transladada pelo histograma tempo-área e depois amortecida pelo re-

servatório linear. O histograma tempo-área procura considerar a variação do tempo de concentração das diferentes partes da bacia hidrográfica.

**Modelo Dooge:** Generaliza a combinação dos efeitos de armazenamento e translação, procurando levar em conta o efeito de distribuição da precipitação e do amortecimento no escoamento.

Os modelos não-lineares se baseiam nos conceitos fundamentais do escoamento, como a conservação da massa e da quantidade de movimento, que é teoricamente não linear. O comportamento do movimento da água em rios e canais é representado por duas equações diferenciais que controlam a conservação da massa e da quantidade de movimento, mais conhecidas como equações de Saint-Venant.

Para os casos de representação do movimento de água em rios e canais, onde assume-se a hipótese de escoamento unidimensional, as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento podem ser representadas, respectivamente, como se segue.

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(Uy)}{\partial x} = q_1 \quad (2.3)$$

onde:  $y$  = profundidade do escoamento;

$U$  = velocidade média do escoamento na seção transversal;

$x$  = distância na direção longitudinal;

$t$  = tempo;

$q_1$  = contribuição lateral.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f) + \frac{q_l}{y} (v_l - U) \quad (2.4)$$

onde:  $g$  = aceleração da gravidade;

$S_0$  = declividade do fundo do canal;

$S_f$  = declividade da linha de fricção;

$v_l$  = componente longitudinal da velocidade de escoamento da contribuição lateral;

e as demais grandezas como definidas na Equação 2.3.

Os dois primeiros termos da Equação 2.4 representam as forças de inércia do escoamento enquanto que o terceiro termo representa uma força de pressão hidrostática. A parcela  $gS_0$  representa a ação da gravidade sobre o escoamento e a parcela  $gS_f$  representa a força de fricção. O efeito dinâmico da contribuição lateral sobre o escoamento é representado pela parcela  $q_l(v_l - U)/y$ .

Os modelos não-lineares diferem entre si pelas forças que são consideradas na formulação do modelo. Como exemplos de modelos não-lineares, tem-se os modelos descritos resumidamente a seguir.

**Modelo de Onda Cinemática:** representa o escoamento pela equação da conservação da massa, Equação 2.3, e a equação dinâmica, Equação 2.4, simplificada, levando-se em consideração somente os efeitos da ação da gravidade e da fricção. Desconsiderando-se a contribuição lateral, a equação dinâmica fica reduzida a  $S_0 = S_f$ .

**Modelo de Difusão:** representa o escoamento pela equação da conservação da massa, Equação 2.3, e a equação dinâmica, Equação 2.4, simplificada, desconsiderando-se as duas primeiras parcelas que representam os termos de inércia do escoamento

**Modelo Dinâmico:** representa o escoamento pela equação da conservação da massa, Equação 2.3, e considera todos os termos da equação dinâmica, Equação 2.4.

A seguir, descreve-se mais detalhadamente a teoria do hidrograma unitário, que foi utilizado em conjunto com o método do Filtro de Kalman, em virtude de sua simplicidade e larga utilização na modelagem hidrológica.

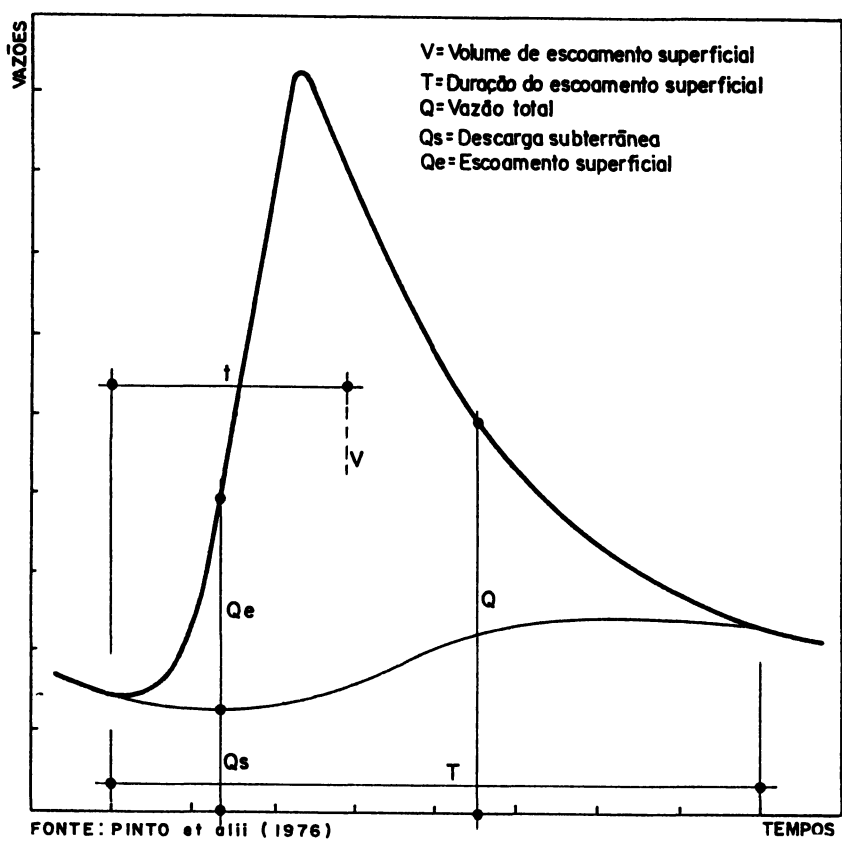
#### 2.1.1 Teoria do Hidrograma Unitário

Como citado anteriormente, os modelos determinísticos lineares se baseiam na teoria do hidrograma unitário e nas diferentes formas de se estimar as ordenadas que o definem. O método do hidrograma unitário apresentado por SHERMAN (1932), citado por PINTO et alii (1976), baseia-se em determinadas propriedades do hidrograma de escoamento superficial.

O hidrograma de uma onda de cheia é formado pela superposição de três tipos de escoamento: superficial, sub-superficial e subterrâneo. No caso do hidrograma unitário considera-se os esco-

mentos superficial e sub-superficial em conjunto, admitindo-se, portanto, a onda de cheia composta apenas pelos escoamentos subterrâneo e superficial, conforme Figura 2.1. Quando comparados os escoamentos superficial e subterrâneo, verifica-se que possuem propriedades sensivelmente diferentes.

FIGURA 2.1 - HIDROGRAMAS DE ESCOAMENTO SUPERFICIAL E SUBTERRÂNEO



O escoamento superficial caracteriza-se pela sua maior velocidade, sendo o elemento significativo no processo de formação de ondas de cheia. A distinção entre o comportamento dos escoamentos superficial e subterrâneo torna conveniente o estudo em separado do hidrograma de escoamento superficial, que por suas características próprias, melhor define o fenômeno das cheias.

SHERMAN (1932), citado por PINTO et alii (1976) apresenta as três proposições básicas referentes ao hidrograma de escoamento superficial, quando consideradas chuvas de distribuição espacial uniforme e intensidade constante sobre uma bacia hidrográfica:

- a) em uma dada bacia hidrográfica, o tempo de duração do escoamento superficial é constante para chuvas de igual duração;
- b) duas chuvas de igual duração, produzindo volumes diferentes de escoamento superficial, dão lugar a hidrogramas em que as ordenadas, em tempos correspondentes, são proporcionais aos volumes totais escoados;
- c) a distribuição, no tempo, do escoamento superficial de determinada precipitação independe de precipitações anteriores.

O hidrograma unitário é uma generalização desses princípios, no qual se considera um volume de escoamento superficial gerado por uma precipitação efetiva de intensidade constante e que equivale a uma altura de 10 mm de água distribuída uniformemente sobre toda a bacia hidrográfica.

MAGALHÃES (1989) cita as hipóteses intrínsecas ao método, tendo comentários a respeito das limitações do uso do hidrograma unitário:



a) chuvas efetivas uniformemente distribuídas sobre a bacia.

Esta hipótese dificulta a aplicação do método em grandes bacias hidrográficas, principalmente naquelas estreitas e alongadas, e obriga a divisão em sub-bacias com registro de dados e o uso de modelos de amortecimento para unir o resultado obtido para cada sub-bacia. Precipitações uniformes em grandes áreas são, de certa forma, raras e as perdas por infiltração e evaporação não ocorrem de forma homogênea em toda a bacia;

b) chuvas efetivas com intensidade constante ao longo de certo período. Esta hipótese limita o uso do método em pequenas bacias. Grandes bacias têm os efeitos da variação de intensidade diminuídos pelo sistema de canal, mas pequenas bacias podem ser altamente influenciadas por essas variações, obrigando a adoção de pequena duração de chuva, ou intervalo de tempo pequeno na divisão de chuvas complexas;

c) princípio da linearidade. Esse princípio implica que duas chuvas efetivas, de mesma duração e intensidades distintas, tenham hidrogramas superficiais com mesmo tempo de duração. Na verdade, os efeitos de calha podem fazer com que os hidrogramas variem substancialmente com as intensidades das chuvas de mesma duração;

d) princípio de invariância com o tempo. As variações sazonais que costumam ocorrer nas bacias hidrográficas têm efeitos significativos nos escoamentos superficiais, prin-

principalmente em bacias rurais ou cobertas com florestas, devido à cobertura vegetal. Dessa forma, é de se esperar diferentes hidrogramas superficiais para chuvas efetivas semelhantes, dependendo da época de ocorrência. Além disso, há que se considerar a existência de alterações geométricas naturais ou artificiais na calha fluvial e na superfície da bacia.

## 2.2 MODELOS ESTOCÁSTICOS

As séries temporais de variáveis hidrológicas podem ser consideradas como sendo uma realização  $z_t$  de um processo estocástico  $Z_t$ , podendo ser classificado como estacionário e não estacionário.

Um processo estocástico  $Z_t$  é estacionário se suas propriedades estatísticas não se modificam ao longo do tempo. Formalmente se a distribuição conjunta de  $z_t$  e  $z_{t+r}$  for independente de  $t$  o processo estocástico  $Z_t$  é dito estacionário. Entretanto muitas vezes se considera  $Z_t$  como estacionário se  $E(z_t)$  independe de  $t$  (estacionariedade de 1ª ordem) ou se  $E(z_t)$  e  $E(z_t z_{t+r})$  independe de  $t$  (estacionariedade de 2ª ordem).

Dentre os modelos para descrever processos estocásticos, pode-se citar os seguintes:

- a) autoregressivos (AR);
- b) médias móveis (MA);
- c) autoregressivos e médias móveis (ARMA);
- d) autoregressivos integrados médias móveis (ARIMA).

Os três primeiros aplicam-se a séries hidrológicas estacionárias enquanto que o último modelo tem sua utilização voltada a séries hidrológicas não estacionárias. Na sequência apresenta-se alguns aspectos teóricos sobre os modelos estocásticos.

### 2.2.1 Filtro Linear

Os modelos estocásticos são baseados na idéia de que uma série temporal, na qual os valores  $z_t$  são altamente dependentes, pode ser definida como sendo gerada por uma série de ruídos independentes  $a_t$ . Sob a hipótese de média zero e variância  $\sigma_a^2$ , estes ruídos são denominados ruídos brancos, onde geralmente assume-se que os mesmos possuem uma distribuição normal.

Para simplificação de representação BOX e JENKINS (1976) utilizam o operador **backward shift** B definido como a seguir.

$$Bz_t = z_{t-1} \quad (2.5)$$

ou seja

$$B^m z_t = z_{t-m}$$

Outro importante operador é o operador **backward difference**  $\nabla$ , que pode ser escrito genericamente em termos de  $B$ , definido na Equação 2.5, como:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = (1-B) z_t$$

O processo de ruídos brancos  $a_t$  é suposto transformado para o processo  $z_t$  por uma operação denominada filtro linear. A operação filtro linear pode ser definida, simplesmente, como a soma ponderada de observações anteriores, de tal modo que:

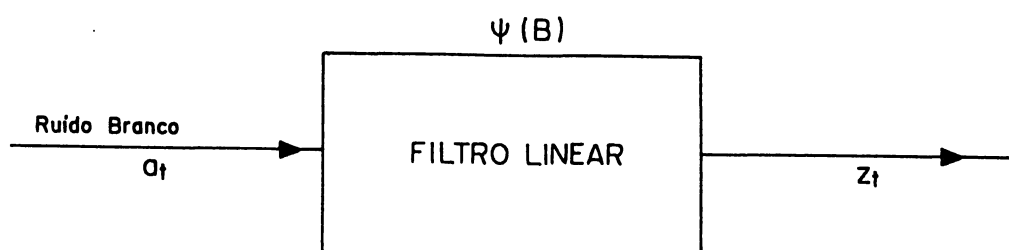
$$\begin{aligned} z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\ &= \mu + \psi(B) a_t \end{aligned}$$

onde, em geral,  $\mu$  é o parâmetro que determina o nível do processo  $z_t$  e  $\psi(B)$  definido por:

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$$

é o operador linear que transforma  $a_t$  em  $z_t$  denominado de função de transferência do filtro linear. A Figura 2.2 representa de maneira esquemática a operação do filtro linear.

FIGURA 2.2 - REPRESENTAÇÃO DE UMA SÉRIE TEMPORAL COMO RESULTADO DA OPERAÇÃO DE UM FILTRO LINEAR



A seqüência de pesos  $\psi_1, \psi_2, \dots$ , pode ser, teoricamente, finita ou infinita. Se esta seqüência for finita ou infinita convergente, o filtro é dito estável e o processo  $z_t$  estacionário, sendo  $\mu$  a média do processo  $z_t$ . Caso contrário,  $z_t$  é não estacionário e  $\mu$  representa apenas um ponto de referência para o nível do processo.

### 2.2.2 Modelos Autoregressivos

Um tipo de modelo estocástico útil na representação de processos hidrológicos são os chamados modelos autoregressivos. BOX e JENKINS (1976) definem como um modelo que representa o valor atual do processo  $z_t$  como sendo expresso por um conjunto finito e linear de valores anteriores do processo  $z_t$  e um ruído  $a_t$ .

Definindo os valores do processo  $z_t$  em intervalos de tempo igualmente espaçados  $t, t-1, t-2, \dots$ , por  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ , e, também, chamando  $\tilde{z}_t, \tilde{z}_{t-1}, \tilde{z}_{t-2}$ , os desvios de  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$  em relação

à média, isto é,

$$\bar{z}_t = z_t - \mu$$

então,

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \phi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t \quad (2.6)$$

é chamado modelo autoregressivo de ordem  $p$ , sendo representado por  $AR(p)$ . O modelo autoregressivo também pode ser representado por  $\phi(B)\bar{z}_t = a_t$ , onde o operador linear  $\phi(B)$  é definido por:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (2.7)$$

Os modelos autoregressivos são um exemplo de filtro linear, contendo  $p+2$  parâmetros a estimar:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \mu$  e  $\sigma_a^2$ .

### 2.2.3 Modelos de Médias Móveis

Os modelos autoregressivos, definidos pela Equação 2.6, expressam o desvio  $\bar{z}_t$  do processo  $z_t$  através da soma ponderada dos desvios anteriores  $\bar{z}_{t-1}, \bar{z}_{t-2}, \dots, \bar{z}_{t-p}$  do processo  $z_t$  mais um ruído aleatório  $a_t$ .

Outro tipo de modelo, de aplicação nos processos representados por séries temporais, são os chamados modelos de médias móveis, nos quais o desvio  $\bar{z}_t$  é representado pela soma ponderada de ruídos

aleatórios  $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ , ou seja

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.8)$$

A Equação 2.8 define um modelo de médias móveis de ordem  $q$  e representado por  $MA(q)$ , onde  $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots$ , são os ponderadores e que, também, pode ser representado por  $\tilde{z}_t = \theta(B)a_t$ , onde o operador linear  $\theta(B)$  é definido por:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

Os modelos de médias móveis são um exemplo de filtro linear, contendo  $q+2$  parâmetros a estimar:  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \mu$  e  $\sigma_a^2$ .

#### 2.2.4 Modelos Autoregressivos e Médias Móveis

Os modelos autoregressivos e médias móveis, como o próprio nome sugere, são uma combinação de modelos autoregressivos e modelos de médias móveis. Um modelo autoregressivo e médias móveis de ordem  $p$  e  $q$ , representado por  $ARMA(p, q)$ , é definido por:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

contendo  $p+q+2$  parâmetros a estimar:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \mu$  e  $\sigma_a^2$ . Em muitos casos práticos, as séries temporais estacionárias

podem ser representadas por modelos ARMA com os valores de  $p$  e  $q$  no máximo igual a dois.

### 2.2.5 Modelos Autoregressivos Integrados Médias Móveis

Na prática são encontradas, também, séries temporais  $z_t$  que não apresentam comportamento estacionário. Em particular, embora as propriedades estatísticas das séries possam ser diferentes a cada intervalo de tempo, as séries obtidas pelas diferenças entre os valores do processo  $z_t$  podem apresentar comportamento estacionário.

Este comportamento segundo BOX e JENKINS (1976), pode ser representado por um operador autoregressivo generalizado  $\phi(B)$  definido por:

$$\phi(B) = \phi(B) (1-B)^d \quad (2.9)$$

onde  $\phi(B)$  é um operador autoregressivo estacionário como definido na Equação 2.7, e  $d$  representa o grau de diferenciação da série temporal  $z_t$ .

Desta forma um modelo genérico para representar um comportamento não estacionário é definido pela aplicação do operador definido pela Equação 2.9 sobre o processo  $z_t$  ou por:



$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \tag{2.10}$$

onde:

$$w_t = \nabla^d z_t \tag{2.11}$$

A Equação 2.10 representa um modelo **ARMA(p,q)** aplicado ao processo  $w_t$ , originado da diferenciação do processo  $z_t$ . As Equações 2.10 e 2.11 definem um modelo autoregressivo integrado médias móveis de ordem  $p,d,q$ , representado por **ARIMA(p,d,q)**. Na prática, obtém-se processos estacionários  $w_t$  com um grau de diferenciação  $d \leq 2$ .

A relação inversa da Equação 2.11 é dada por:

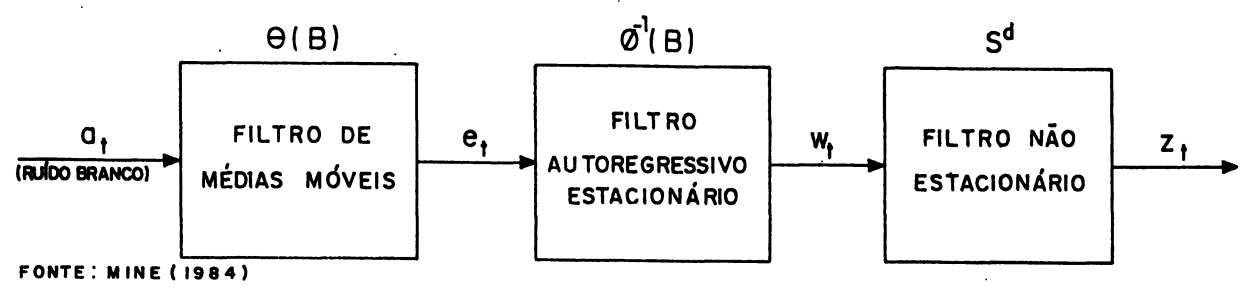
$$z_t = S^d w_t$$

onde  $S$ , é um operador soma definido por:

$$S w_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_{t-j}$$

O modelo genérico autoregressivo integrado médias móveis pode ser representado pela aplicação conjunta de três operações de filtragem sobre o processo de ruídos  $a_t$ , conforme esquematizado na Figura 2.3.

FIGURA 2.3 - DIAGRAMA DE BLOCOS REPRESENTATIVO DE UM MODELO ARIMA



### 3 FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman foi introduzido na literatura sobre teoria de controle por KALMAN (1960) e KALMAN e BUCY (1961). O trabalho, originalmente, representava uma nova solução dos problemas de filtragem e previsão para sistemas lineares que apresentassem variáveis aleatórias distribuídas segundo a lei de Gauss. Trabalhos posteriores ampliaram a aplicação da teoria do Filtro de Kalman a problemas não lineares e não gaussianos.

O desenvolvimento da teoria do Filtro de Kalman encontra aplicações na teoria do controle, teoria da comunicação, estudos econômicos e sócio-econômicos, hidrologia, etc...

Hidrólogos modernos têm aplicado filtros e processos adaptivos de previsão de variáveis aleatórias, utilizando procedimentos desenvolvidos por estudiosos de problemas de comunicação e controle, que envolvem noções de processos estocásticos e análise de séries temporais. Uma série temporal de observações hidrológicas tem sido entendida como uma seqüência de valores verdadeiros e desconhecidos, denominados de sinal, somados a erros de várias origens, denominados de ruídos.

Neste contexto, filtrar significa eliminar o ruído, para a seguir utilizar apenas o sinal na equação de previsão que passa a ser chamada de adaptiva. A aplicação envolve estimativas das matrizes de covariância dos erros de previsão.

A teoria apresentada por KALMAN(1960) procura resolver o problema da estimativa do verdadeiro estado do sistema, a partir de observações que apresentam componentes aleatórios. Através deste algoritmo é possível prever-se o estado futuro do sistema a partir de observações de estados anteriores, e ao mesmo tempo, atualizar os parâmetros do modelo escolhido para representar o sistema real.

O trabalho matemático do problema de filtragem fica simplificado, quando se generaliza o conceito de modelos estocásticos lineares através dos modelos dinâmicos de estado (**State-Space Models**). Nesses modelos a vazão a ser prevista é um estado do sistema. Este conceito pode ser generalizado, adotando-se como estado do sistema, os parâmetros do modelo utilizado para representar o sistema físico real, como por exemplo, as ordenadas do hidrograma unitário ou os parâmetros de um modelo autoregressivo. Na seqüência aborda-se o método do Filtro de Kalman, apresentando-se dois algoritmos do filtro em um sentido crescente de generalidade.

### 3.1 MODELOS DINÂMICOS DE ESTADO

Atualmente verifica-se uma tendência na utilização de conceitos tais como modelos dinâmicos de estado para a representação de sistemas hidrológicos. Esta tendência pode ser explicada pelo fato de que os conceitos de estado de um sistema e modelos dinâmicos de estado, permitem grande flexibilidade na descrição e modelagem de sistemas.

Em linhas gerais, diz-se que o processo  $x_t$  (escalar ou vetor), que descreve o comportamento ou as propriedades do sistema no tempo  $t$ , é chamado estado do sistema no tempo  $t$ , se valores futuros de  $x_{t+1}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , são bem descritos pelo conhecimento de  $x_t$  ou de  $x_t$  e  $x_{t-1}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ .

Em hidrologia, o estado do sistema pode ser representado pelo valor correto de uma quantidade mensurável, como: alturas linimétricas, vazões, totais precipitados, volumes de reservatórios, etc...

Uma boa representação do estado  $x_t$ , considerando um sistema linear é dado pela equação:

$$x_t = \phi_{t-1} x_{t-1} + \Gamma_t w_t \quad (3.1)$$

onde :  $\phi_{t-1}$  e  $\Gamma_t$  = matrizes de transição;

$w_t$  = ruídos do sistema e

$x_t$  = estado do sistema.

A Equação 3.1, denominada equação de estado, apresenta-se corrompida pela presença dos ruídos aleatórios  $w_t$ . Em consequência, as variáveis de estado são aleatórias e suas distribuições probabilísticas estão relacionadas às distribuições probabilísticas dos ruídos do sistema. A Equação 3.1 é dita estacionária se  $\phi_{t-1}$  e  $\Gamma_t$  são constantes no tempo.

Em geral, o verdadeiro estado do sistema  $x_t$  não é sempre conhecido, mas acha-se corrompido pelos ruídos  $w_t$ . Pode, entretanto,

ser estimado através de uma equação de mensuração. Para o caso de sistemas lineares, tem-se:

$$z_t = H_t x_t + v_t \tag{3.2}$$

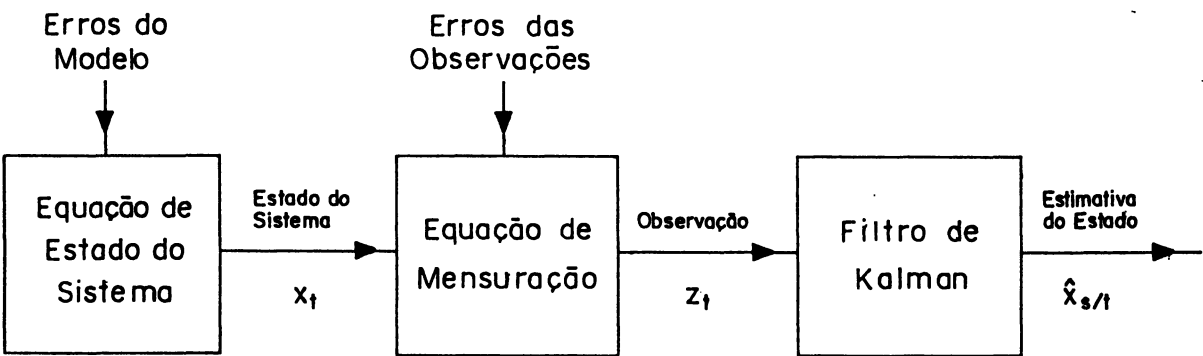
onde:  $z_t$  = observação do estado  $x_t$ ;

$H_t$  = matriz de transição e

$v_t$  = erro de observação.

O objetivo da aplicação do algoritmo, apresentado por KALMAN (1960), é minimizar a influência dos erros de modelagem e observação sobre a identificação do real estado do sistema. O procedimento do sistema de mensuração e estimativa é apresentado na Figura 3.1.

FIGURA 3.1 - PROCEDIMENTO DO SISTEMA DE MEDIDA E ESTIMATIVA



Considerando-se para o instante  $s$ , as variáveis de estado do sistema  $x_s$  e o ruído  $w_s$ , tem-se que o termo  $w_t$ , presente na Equação 3.1, descreve a informação sobre  $x_t$  que não está incluída em  $x_s$ , para  $s < t$  e assume-se que é independente de  $x_s$  e  $w_s$ .

Conhecidas as observações até o tempo  $s$  inclusive, três espécies de problemas de estimativa do estado do sistema  $x_t$ , ao tempo  $t$ , são de interesse:

a) **filtragem**: estimativa de  $x_t$  quando  $t = s$ ;

b) **smoothing** (suavização): estimativa de  $x_t$  quando  $t < s$ ;

c) **previsão**: estimativa de  $x_t$  quando  $t > s$ .

As matrizes  $\phi_{t-1}$ ,  $\Gamma_t$  e  $H_t$  são supostamente conhecidas. Alguns sistemas podem ter matrizes de transição variando no tempo, mas se elas são conhecidas, a não estacionariedade não dificulta o problema de filtragem.

Uma das características do algoritmo apresentado por KALMAN (1960) é a recursividade. De um modo simples, filtros recursivos são aqueles que calculam estimativas presentes, em função das observações recentes e das estimativas anteriores. As observações registradas no passado se encontram de algum modo condensadas nas estimativas anteriores. MINE (1984) apresenta um exemplo que ilustra o conceito de recursividade conforme a seguir.

Considerando-se o problema da estimativa de uma constante não aleatória  $x$ , baseada em observações  $z_i$ , corrompidas por ruídos brancos  $v_i$ , pode-se escrever:

$$z_i = x + v_i \quad (i=1, 2, \dots, t)$$

Uma estimativa não tendenciosa de  $x_t$ , de mínima variância, é dada por:

$$\hat{x}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z_i$$

Quando uma nova observação é realizada, a nova estimativa  $\hat{x}_{t+1}$  será:

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} z_i \quad (3.3)$$

A Equação 3.3 pode ser manipulada, de tal forma que a estimativa anterior  $\hat{x}_t$ , fique evidenciada, ou seja,

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{t}{t+1} \hat{x}_t + \frac{1}{t+1} z_{t+1} \quad (3.4)$$

Utilizando-se a Equação 3.4 para calcular  $\hat{x}_{t+1}$  no lugar da Equação 3.3, a necessidade de armazenar observações é eliminada, pois toda informação anterior está contida em  $\hat{x}_t$ . Tem-se, portanto, um estimador linear recursivo ou um filtro recursivo. A Equação 3.4 pode ser representada como a seguir:

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \frac{1}{t+1} (z_{t+1} - \hat{x}_t) \quad (3.5)$$

Analisando-se a Equação 3.5, observa-se que a nova estimativa  $\hat{x}_{t+1}$ , é dada pela estimativa anterior  $\hat{x}_t$  somada a uma diferença



ponderada entre a nova observação  $z_{t+1}$  e o seu valor esperado  $\hat{x}_t$ .

Generalizando o exemplo dado para quantidades vetoriais, a Equação 3.4 pode ser escrita como:

$$\hat{x}_{t/t} = K_t' \hat{x}_{t/t-1} + K_t z_t \quad (3.6)$$

Antes de se prosseguir é importante reforçar a idéia de que o índice  $t/t-1$  refere-se à previsão de uma quantidade no tempo  $t$  a partir de seu valor no tempo  $t-1$  e que o índice  $t/t$  refere-se à atualização de uma quantidade no tempo  $t$  à medida em que uma nova observação no tempo  $t$  é obtida.

Analisando-se a Equação 3.6 observa-se que a nova estimativa  $\hat{x}_{t/t}$  é uma ponderação entre a estimativa anterior  $\hat{x}_{t/t-1}$  e a nova observação  $z_t$ , onde os pesos são representados por  $K_t'$  e  $K_t$ , matrizes variáveis no tempo.

O problema agora reside em obter as matrizes  $K_t'$  e  $K_t$  que estabeleçam de uma maneira ótima a estimativa  $\hat{x}_{t/t}$ . Antes de se prosseguir na solução deste problema, apresenta-se algumas características quanto às distribuições dos ruídos  $w_t$  e  $v_t$ , presentes nas Equações 3.1 e 3.2

Na teoria original, KALMAN(1960) apresentou uma nova solução para o problema de filtragem linear gaussiana. Sob a hipótese de que as seqüências aleatórias  $w_t$  e  $v_t$  são ruídos brancos, e de que  $w_t$  e  $v_t$  são independentes entre si tem-se como propriedades:

- a) média  $\bar{\mathbf{w}} = E[\mathbf{w}_t] = 0$ ;
- b) matriz de covariância  $\mathbf{Q} = E[\mathbf{w}_t \cdot \mathbf{w}_t^T]$ ;
- c) média  $\bar{\mathbf{v}} = E[\mathbf{v}_t] = 0$ ;
- d) matriz de covariância  $\mathbf{R} = E[\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_t^T]$ ;

### 3.2 DERIVAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO

(Sistemas Lineares Gaussianos)

As expressões apresentadas neste item foram obtidas considerando-se a hipótese de um sistema linear gaussiano. O objetivo é determinar os valores dos ponderadores  $\mathbf{K}_t^1$  e  $\mathbf{K}_t$  presentes na Equação 3.6, otimizando-se a forma adotada do estimador linear.

Uma equação para o erro de estimativa  $\tilde{\mathbf{x}}_t$ , após incorporada a observação  $\mathbf{z}_t$ , pode ser obtida da Equação 3.6, a partir da Equação 3.2 e da definição das relações abaixo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{x}}_{t/t}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} = \mathbf{x}_t + \tilde{\mathbf{x}}_{t/t-1}$$

A partir do exposto, a equação do erro de estimativa  $\tilde{\mathbf{x}}_{t/t}$  é expressa por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t/t} = (\mathbf{K}_t^1 + \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t - \mathbf{I}) \mathbf{x}_t + \mathbf{K}_t^1 \tilde{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t \quad (3.7)$$

onde:  $\mathbf{I}$  = matriz identidade.

Por definição, diz-se que um estimador é não tendencioso se o valor esperado do erro introduzido por este estimador é nulo. Calculando-se o valor esperado da Equação 3.7, sob a hipótese de que  $E[\tilde{x}_{t/t-1}] = 0$  e sob a condição de que  $E[v_t]=0$ , tem-se:

$$E[\tilde{x}_{t/t}] = (K_t' + K_t H_t - I) E[x_t] \quad (3.8)$$

A Equação 3.8 resulta nula se o termo entre parênteses for nulo, já que  $E[x_t]$ , para o caso mais geral, é diferente de zero, logo:

$$K_t' = I - K_t H_t \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.7, tem-se:

$$\tilde{x}_{t/t} = (I - K_t H_t) \tilde{x}_{t/t-1} + K_t v_t \quad (3.10)$$

A partir da obtenção da Equação 3.10, pode-se fazer uma análise sobre a propagação dos erros acrescentados por cada estimativa do estado do sistema, antes de se obter a escolha ótima do ponderador  $K_t$ .

### 3.2.1 Propagação de Erros

O vetor de estado  $x_{t-1}$ , em um tempo  $t-1$ , é conhecido com uma incerteza expressa pela matriz de covariância do erro de estimativa dada por:

$$P_{t-1} = E[\tilde{x}_{t-1} \cdot \tilde{x}_{t-1}^T]$$

onde o valor  $\tilde{x}_{t-1}$  é a diferença entre a estimativa  $\hat{x}_{t-1}$  e o estado verdadeiro  $x_{t-1}$ .

O objetivo é obter uma estimativa do estado  $x_t$  ao tempo  $t$ , que terá um erro  $\tilde{x}_t$  e que este erro não introduza nenhuma tendenciosidade no processo de filtragem. Para a estimativa de  $x_t$  a partir de  $t-1$ , utiliza-se a matriz de transição conhecida  $\phi_{t-1}$  do estado anterior  $x_{t-1}$ , como a seguir.

$$\hat{x}_t = \phi_{t-1} \hat{x}_{t-1} \quad (3.11)$$

Para uma verificação da não tendenciosidade do erro  $\tilde{x}_t$  subtrai-se a Equação 3.1 da Equação 3.11, obtendo-se:

$$\hat{x}_t - x_t = \phi_{t-1} \hat{x}_{t-1} - (\phi_{t-1} x_{t-1} + \Gamma_t w_t)$$

ou

$$\tilde{x}_t = \phi_{t-1} \tilde{x}_{t-1} - \Gamma_t w_t \quad (3.12)$$

O valor esperado do erro é dado por:

$$E[\tilde{x}_t] = \phi_{t-1} E[\tilde{x}_{t-1}] - \Gamma_t E[w_t] \quad (3.13)$$

Sob a hipótese de que  $\tilde{x}_{t-1}$  e  $w_t$  são não tendenciosos, isto é,  $E[\tilde{x}_{t-1}] = E[w_t] = 0$ , a Equação 3.13 assume valor zero, permitindo concluir que uma estimativa do estado do sistema, a partir da Equação 3.11, não introduz tendenciosidades.

A matriz de covariância  $P_t$  é dada por:

$$P_t = E[\tilde{x}_t \cdot \tilde{x}_t^T] \quad (3.14)$$

Desenvolvendo-se o produto entre colchetes da Equação 3.14, com  $\tilde{x}_t$  como definido pela Equação 3.12 e sob a condição de que o ruído  $w_t$  constitui uma série de ruídos brancos com  $E[\tilde{x}_{t/t-1} \cdot w_t] = 0$ , obtém-se:

$$P_t = \Phi_{t-1} E[\tilde{x}_{t-1} \cdot \tilde{x}_{t-1}^T] \Phi_{t-1}^T + \Gamma_t E[w_t \cdot w_t^T] \Gamma_t^T \quad (3.15)$$

Por definição:

$$E[\tilde{x}_{t-1} \cdot \tilde{x}_{t-1}^T] = P_{t-1}$$

e

$$E[w_t \cdot w_t^T] = Q$$

Substituindo-se estas duas definições na Equação 3.15 tem-se:

$$P_t = \Phi_{t-1} P_{t-1} \Phi_{t-1}^T + \Gamma_t Q \Gamma_t^T \quad (3.16)$$

Analisando-se a Equação 3.16, verifica-se que  $P_t$  é uma projeção da matriz de covariância, a partir da matriz de covariância  $P_{t-1}$  e pode-se representá-la por  $P_{t/t-1}$ . O problema passa ser como

atualizar a matriz de covariância  $P_t$  quando uma nova informação  $z_t$  é incorporada e que se denota por  $P_{t/t}$ .

A partir da Equação 3.14, pode-se expressar  $P_{t/t}$  conforme a seguir.

$$P_{t/t} = E[\tilde{x}_{t/t} \cdot \tilde{x}_{t/t}^T]$$

Efetuando-se o produto matricial representado entre colchetes, considerando-se a variável  $\tilde{x}_{t/t}$  como expresso na Equação 3.10, tem-se:

$$P_{t/t} = E[(I - K_t H_t) \tilde{x}_{t/t-1} [\tilde{x}_{t/t-1} (I - K_t H_t)^T + v_t^T K_t^T] + K_t v_t [\tilde{x}_{t/t-1} (I - K_t H_t)^T + v_t^T K_t^T]] \quad (3.17)$$

Como definido anteriormente, tem-se:

$$E[\tilde{x}_{t/t-1} \cdot \tilde{x}_{t/t-1}^T] = P_{t/t-1};$$

$$E[v_t \cdot v_t^T] = R;$$

$$E[\tilde{x}_{t/t-1} \cdot v_t^T] = E[v_t \cdot \tilde{x}_{t/t-1}^T] = 0$$

Substituindo-se estas três definições na Equação 3.17, e com as devidas simplificações tem-se:

$$P_{t/t} = (I - K_t H_t) P_{t/t-1} (I - K_t H_t)^T + K_t R K_t^T \quad (3.18)$$

As Equações 3.16 e 3.18 procuram avaliar a influência dos erros de modelagem  $w_t$  e dos erros de observação  $v_t$ . A Equação 3.16 faz uma previsão da matriz de covariância dos erros de estimativa

no tempo  $t$ , quando se estima o estado do sistema  $x_t$ , a partir de  $x_{t-1}$ , enquanto a Equação 3.18 procura atualizar o valor da matriz de covariância dos erros de estimativa, quando uma nova observação  $z_t$  é obtida. Novamente a questão básica é obter a matriz  $K_t$ , que torna o Filtro de Kalman, um estimador linear ótimo.

### 3.2.2 Matriz de Ganho ( $K_t$ )

Um critério utilizado para a escolha ótima da matriz de ganho  $K_t$  é minimizar a soma escalar ponderada dos elementos da diagonal principal da matriz de covariância  $P_{t/t}$ .

MINE (1984) apresenta desenvolvimento matemático para a obtenção de  $K_t$ , onde a definição ótima de  $K_t$  obtida é dada por:

$$K_t = P_{t/t-1} H_t^T [H_t P_{t/t-1} H_t^T + R]^{-1} \quad (3.19)$$

Substituindo-se a Equação 3.19 na Equação 3.18 e efetuadas as devidas simplificações obtém-se:

$$P_{t/t} = [I - K_t H_t] P_{t/t-1} \quad (3.20)$$

que atualiza de modo otimizado a estimativa da matriz de covariância dos erros de estimativa.

O Quadro 3.1 apresenta um resumo das várias quantidades envolvidas no algoritmo do Filtro de Kalman, bem como, as condições iniciais e as hipóteses relativas à formulação do algoritmo.

O algoritmo apresentado no Quadro 3.1 representa uma forma mais simples do Filtro de Kalman onde as matrizes de covariância dos erros de modelagem  $Q$  e dos erros de observação  $R$  são consideradas constantes no tempo. Na seqüência apresenta-se um algoritmo mais geral onde as matrizes  $Q$  e  $R$  são corrigidas e atualizadas a cada intervalo de tempo. Portanto, a partir de agora, as matrizes  $Q$  e  $R$  são representadas também por um índice  $t$ , referindo-se à sua dependência temporal.

QUADRO 3.1. - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS  $w$  E  $v$  E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA  $Q$  E  $R$ .

Equação de Estado	$x_t = \phi_{t-1}x_{t-1} + \Gamma_t w_t \quad w_t \sim N(0, Q)$
Equação de Mensuração	$z_t = H_t x_t + v_t \quad v_t \sim N(0, R)$
Condições Iniciais	$E[X_0] = \hat{x}_0; E[(\hat{x}_0 - x_0) \cdot (\hat{x}_0 - x_0)^T] = P_0$
Outras Hipóteses	$E[w_t v_j^T] = 0$ para todo $j$ e $t$
<u>Correção</u>	
Matriz de Ganho	$K_t = P_{t/t-1} H_t^T [H_t P_{t/t-1} H_t^T + R]^{-1}$
Estado Atualizado	$x_{t/t} = x_{t/t-1} + K_t [z_t - H_t x_{t/t-1}]$
Matriz de Covariância Atualizada	$P_{t/t} = (I - K_t H_t) P_{t/t-1}$
<u>Previsão</u>	
Previsão do Estado	$x_{t+1/t} = \phi_t x_{t/t}$
Matriz de Covariância do Erro de Previsão do Estado	$P_{t+1/t} = \phi_t P_{t/t} \phi_t^T + \Gamma_{t+1} Q \Gamma_{t+1}^T$



### 3.3 CÁLCULO DAS ESTATÍSTICAS DESCONHECIDAS

O algoritmo do Filtro de Kalman, apresentado no Quadro 3.1, é obtido sob a hipótese de que as estatísticas dos ruídos  $w_t$  e  $v_t$  são conhecidas, o que não ocorre na maioria dos casos práticos. Portanto, é importante a existência de procedimentos que façam uma estimativa destas estatísticas à medida em que os dados são obtidos.

#### 3.3.1 Propriedades da Inovação

Define-se inovação  $v_t$ , como a medida da diferença entre o valor estimado de  $z_t$  a partir da estimativa do estado do sistema  $\hat{x}_{t/t-1}$  e a nova observação  $z_t$ , ou seja:

$$v_t = z_t - H_t \hat{x}_{t/t-1} \quad (3.21)$$

Todas as grandezas envolvidas estão representadas com o subscrito  $t$ , indicando para o caso mais geral a dependência em relação ao tempo. Se todas as quantidades  $\phi_{t-1}$ ,  $H_t$ ,  $\Gamma_t$ ,  $Q_t$  e  $R_t$  são conhecidas, a otimalidade do filtro implica que a inovação deve ter média zero e ser uma variável aleatória normal.

Substituindo a Equação 3.2 na Equação 3.21, e a partir da definição do erro de estimativa  $\tilde{x}_{t/t-1} = \hat{x}_{t/t-1} - x_{t/t-1}$ , tem-se:

$$v_t = -H_t \tilde{x}_{t/t-1} + v_t \quad (3.22)$$

Calculando-se o valor esperado da Equação 3.22 e partindo-se das hipóteses de que  $E[v_t] = E[\tilde{x}_{t/t-1}] = 0$ , tem-se que  $E[v_t] = 0$ , confirmando a condição de média zero para a série de inovações  $v_t$ .

Definindo-se a matriz de covariância da inovação  $v_t$  como  $E[v_t \cdot v_{t-k}] = C_k$ , e considerando-se a definição do erro de estimativa  $\tilde{x}_{t/t-1}$ , para  $k = 0$ , tem-se:

$$C_0 = E[v_t \cdot v_t^T] = H_t E[\tilde{x}_{t/t-1} \tilde{x}_{t/t-1}^T] H_t^T + E[v_t v_t^T]$$

Por definição,  $E[\tilde{x}_{t/t-1} \cdot \tilde{x}_{t/t-1}^T] = P_{t/t-1}$  e  $E[v_t \cdot v_t^T] = R_t$ , logo a equação anterior pode ser expressa por:

$$C_0 = H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t \quad (3.23)$$

Para  $k > 0$ , temos a expressão a seguir, conforme MEHRA (1970):

$$C_k = H_t [\phi_t (I - K_t H_t)]^{k-1} \phi_t [P_{t/t-1} H_t^T - K_t (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t)] \quad (3.24)$$

onde segundo o referido autor  $C_k = C_{-k}^T$ .

Se o filtro é um estimador de mínima variância com matriz de ganho  $K_t$  definida pela Equação 3.19, tem-se que  $C_k = 0$  para todo  $k$  diferente de zero. Para se chegar a esta conclusão basta substituir o valor de  $K_t$  dado pela Equação 3.19 na Equação 3.24.

Assim, quando as quantidades  $\phi_{t-1}$ ,  $H_t$ ,  $\Gamma_t$ ,  $Q_t$  e  $R_t$  são conhecidas, a série de inovações será uma variável aleatória normal com:

$$E[v_t] = 0;$$

$$E[v_t v_t^T] = H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t$$

$$E[v_t v_{t-k}^T] = 0 \text{ para todo } k \neq 0.$$

### 3.3.2 Estimativa das Estatísticas Desconhecidas

Na maioria das aplicações práticas, embora algumas propriedades dos erros possam ser conhecidas, as estatísticas dos erros  $w_t$  e  $v_t$  são desconhecidas. É desejável, portanto, que procedimentos estejam disponíveis para estimar estas estatísticas a partir dos dados observados, à medida em que estes são obtidos.

Uma quantidade razoável de pesquisas foram realizadas na tentativa de se estimar as matrizes de covariância  $Q_t$  e  $R_t$ , mas os algoritmos são não recursivos, como os algoritmos propostos por MEHRA (1970) e MARTIN e STUBERRUD (1976), ou não permitem uma estimativa concomitante das matrizes  $Q_t$  e  $R_t$ , como o algoritmo proposto por SAGE e HUSA (1969), citados por TODINI, O'CONNELL e JONES (1980). Na maioria dos casos, quando a dimensão dos ruídos do sistema  $w_t$  é maior que a dimensão dos ruídos de medição  $v_t$ , MEHRA (1970) mostra que não é possível estimar todos os valores de  $Q_t$ .

Como apresentado no item 3.3.1, que trata das propriedades da inovação, se o filtro é não tendencioso, de mínima variância e todas as estatísticas dos ruídos são conhecidas, então a inovação  $v_t$  será distribuída independentemente com média zero e variância dada pela Equação 3.23.

Segundo TODINI, O'CONNELL e JONES (1980), se as estatísticas dos ruídos não são conhecidas e hipóteses arbitrárias são feitas sobre os seus valores, então o filtro poderá não ser ótimo e a série de inovações  $v_t$  não apresentar as propriedades desejadas. Contudo impondo para a série de inovações  $v_t$ , as condições de média e variância, apresentadas no item 3.3.1, é possível estimar  $v_t$ ,  $R_t$  e  $K_t$ , respectivamente.

TODINI, O'CONNELL e JONES (1980) apresentam desenvolvimento matemático para o estabelecimento de um algoritmo recursivo do Filtro de Kalman, onde são consideradas a estimativa e a atualização dos ruídos  $w_t$  e  $v_t$ , das matrizes de covariância  $Q_t$  e  $R_t$  associadas aos ruídos  $w_t$  e  $v_t$ , respectivamente.

O Quadro 3.2 apresenta as equações do Filtro de Kalman, considerando-se a estimativa e atualização dos ruídos e das matrizes de covariância.

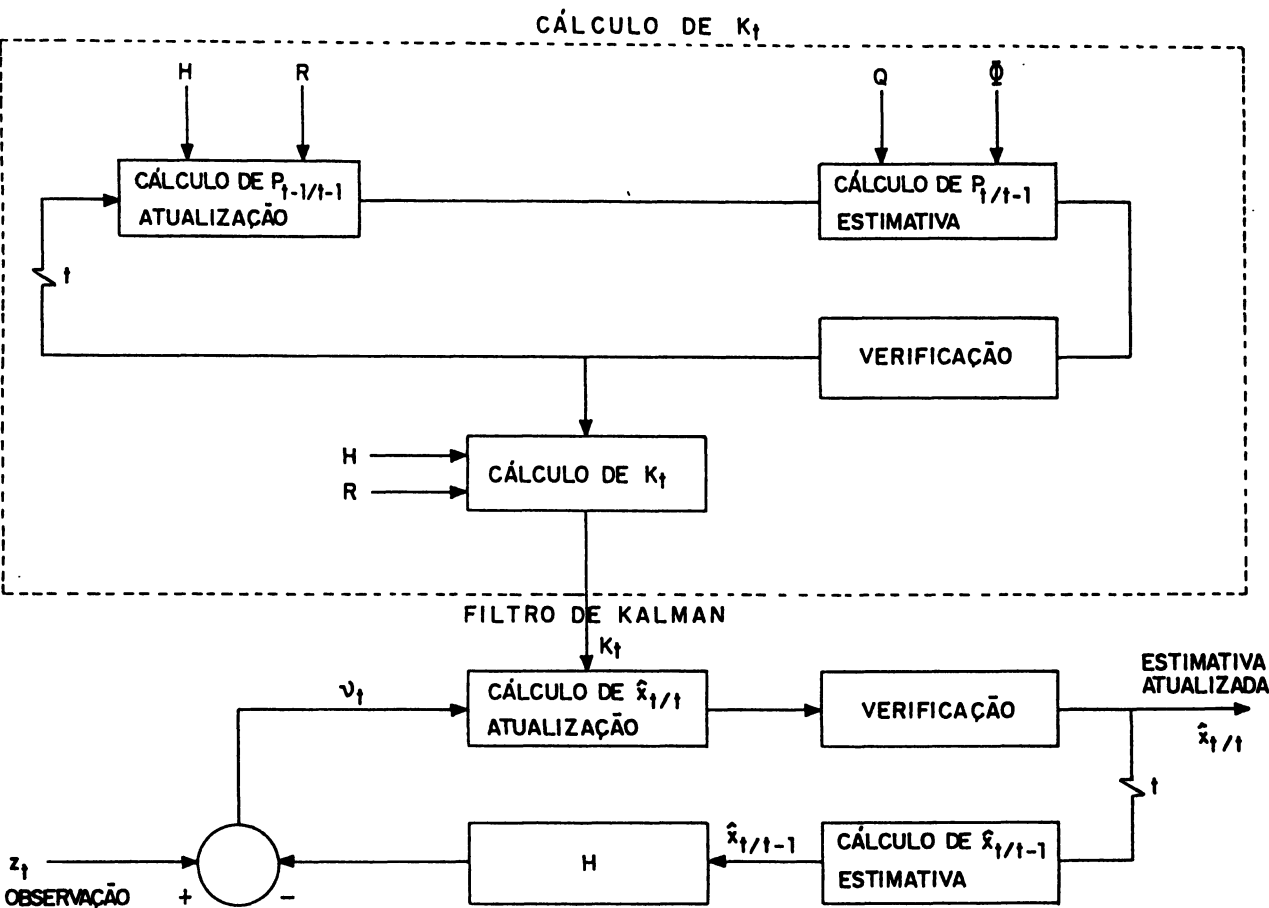
QUADRO 3.2 - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO COM CORREÇÃO DOS RUÍDOS  $w$  E  $v$  E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA  $Q$  E  $R$

Equação de Estado	$x_t = \phi_{t-1}x_{t-1} + \Gamma_t w_t; \quad w_t \sim N(\bar{w}, Q)$
Equação de Mensuração	$z_t = H_t x_t + v_t; \quad v_t \sim N(\bar{v}, R)$
Condições Iniciais	$E[x_0] = \hat{x}_0; \quad E[(\hat{x}_0 - x_0) \cdot (\hat{x}_0 - x_0)^T] = P_0$
Outras Hipóteses	$E[w_t \cdot v_j^T] = 0 \quad \text{para todo } j \text{ e } t$
<u>Correção</u>	
Ruído Atualizado	$v_t = \frac{t-1}{t} v_{t-1} + \frac{1}{t} (z_t - H_t x_{t/t-1})$
Inovação	$v_t = z_t - H_t x_{t/t-1} - v_t$
Matriz de Covariância Atualizada	$R_t = \frac{t-1}{t} R_{t-1} + \frac{1}{t} (v_t v_t^T - H_t P_{t/t-1} H_t^T)$
Matriz de Ganho	$K_t = P_{t/t-1} H_t^T (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$
Estado Atualizado	$x_{t/t} = x_{t/t-1} + K_t v_t$
Matriz de Covariância Atualizada	$P_{t/t} = (I - K_t H_t) P_{t/t-1}$
<u>Previsão</u>	
Ruído	$w_{t+1/t} = w_{t/t-1} + \frac{1}{t} (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1} \Gamma_t^T K_t v_t$
Matriz de Covariância	$Q_{t+1/t} = \frac{t-1}{t} Q_{t/t-1} + \frac{1}{t} (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1} \Gamma_t^T (K_t v_t v_t^T K_t^T + P_{t/t} - \phi_{t-1} P_{t-1/t-1} \phi_{t-1}^T) \Gamma_t (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1}$
A uma Previsão do Estado	$x_{t+1/t} = \phi_t x_{t/t} + \Gamma_{t+1} w_{t+1/t}$
Matriz de Covariância dos erros de Previsão do Estado	$P_{t+1/t} = \phi_t P_{t/t} \phi_t^T + \Gamma_{t+1} Q_{t+1/t} \Gamma_{t+1}^T$

O Quadro 3.2, conforme em TODINI, O’CONNELL e JONES (1980), apresenta-se como um algoritmo mais geral e complexo do que o algoritmo mostrado no Quadro 3.1.

A Figura 3.2 apresenta de maneira esquemática o algoritmo do Filtro de Kalman mostrando as principais grandezas envolvidas na definição do Filtro de Kalman.

FIGURA 3.2 - DIAGRAMA DE BLOCOS REPRESENTATIVO DA OPERAÇÃO DE UM FILTRO DE KALMAN DISCRETO



3.4 ESTIMATIVA DO ESTADO INICIAL

O estado inicial  $x_0$  é o resultado da evolução do sistema anterior ao tempo  $t = 0$  associado a um ruído  $w_s$  com  $s \leq 0$ . Em consequência o estado inicial  $x_0$  é considerado uma variável aleatória. Por hipótese, pode-se assumir que  $x_0$  tenha alguma distribuição de probabilidade específica, obtendo-se um estimador para o estado

inicial  $x_0$  a partir da distribuição de probabilidade.

Alternativamente, assume-se que  $x_0$  é constante e que sua estimativa  $\hat{x}_0$  representa uma variável aleatória. Em qualquer caso, o comportamento estocástico de  $\hat{x}_0 - x_0$ , o erro inicial de estimativa, é que interessa. Admite-se que  $\hat{x}_0 - x_0$  seja um vetor aleatório normalmente distribuído, com média zero e matriz de covariância denotada por  $P_0$ . Então:

$$E[\hat{x}_0 - x_0] = 0;$$

$$E[(\hat{x}_0 - x_0) \cdot (\hat{x}_0 - x_0)^T] = P_0.$$

Pode-se também adotar um período anterior a  $t = 0$  para um aquecimento do modelo, obtendo-se um primeiro valor para os ruídos  $w$  e  $v$ , as matrizes de covariância  $Q$ ,  $R$  e  $P$ , e a matriz de ganho  $K$ .

### 3.5 ESTIMATIVA DAS ORDENADAS DO HIDROGRAMA UNITÁRIO COM BASE NO FILTRO DE KALMAN

A aplicação do método do Filtro de Kalman exige a definição dos seguintes parâmetros:

$\phi_t$  = matriz de transição de estado;

$x_t$  = estado do sistema;

$H_t$  = matriz de transição;

$z_t$  = observação do estado  $x_t$ .

HINO (1973) apresenta uma aplicação do método do Filtro de Kalman para previsão de vazões em tempo real e que permite a determinação das ordenadas do hidrograma unitário. No referido trabalho a vazão em um instante  $t$  é dada pela representação discreta da integral de convolução apresentada a seguir.

$$q_t = \sum_{i=0}^{imax} h_i \cdot u_{t-i} \quad (3.25)$$

onde:  $u_{t-i}$  = precipitação efetiva no instante  $t-i$ ;

$h_i$  = ordenada do hidrograma unitário no  
instante  $i$ ;

$q_t$  = vazão superficial no instante  $t$ .

A Equação 3.25 pode ser expressa matricialmente como se segue:

$$q_t = u_t \cdot h_t \quad (3.26)$$

onde:  $u_t = [ u_t \ u_{t-1} \ u_{t-2} \ \dots \ u_{t-i} \ \dots ]$ ;

$h_t = [ h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_i \ \dots ]^T$ .

Comparando-se a Equação 3.26 com a equação de mensuração, Equação 3.2, pode-se definir:

$z_t$  = vazão superficial no instante  $t$ ;

$H_t$  = precipitações efetivas observadas (inputs do  
sistema);

$x_t$  = ordenadas do hidrograma unitário.



A matriz de transição de estado  $\phi_t$ , no caso da determinação das ordenadas do hidrograma unitário, foi definida como igual a matriz identidade e invariante no tempo.

O procedimento para a identificação das ordenadas do hidrograma unitário, considerando-se uma série de eventos de precipitação e vazão, é resumido a seguir:

1º) a cada intervalo de tempo são lidos novos valores de precipitação e vazão;

2º) determina-se uma nova matriz de transição  $H_t$ , cujo produto pelo vetor  $x_t$ , composto pelas ordenadas do hidrograma unitário, produz uma estimativa  $z_t$  para a vazão no instante  $t$ ;

3º) a partir dos valores de vazão observada  $q_t$  e estimada  $z_t$  no instante  $t$ , aplica-se os algoritmos do Filtro de Kalman, apresentados nos Quadros 3.1 e 3.2.

O procedimento descrito é repetido, considerando-se o número de eventos selecionados para a determinação do hidrograma unitário.

Na aplicação apresentada na presente dissertação o número de ordenadas do hidrograma unitário a serem estimadas e corrigidas em tempo real foi de 11 valores. As dimensões, em termos matriciais, das principais grandezas envolvidas no processo de estimativas das ordenadas foram:

.estado do sistema ( $\mathbf{x}_t$ ): [11x1];  
 .erro do sistema ( $\mathbf{w}_t$ ): [1x1];  
 .covariância dos erros do sistema ( $\mathbf{Q}_t$ ): [1x1];  
 .observação do estado do sistema ( $\mathbf{z}_t$ ): [1x1];  
 .erro de observação ( $\mathbf{v}_t$ ): [1x1]  
 .covariância dos erros de observação ( $\mathbf{R}_t$ ): [1x1];  
 .covariância dos erros de estimativa ( $\mathbf{P}_t$ ): [11x11].

### 3.5.1 Procedimento para Correção das Ordenadas do Hidrograma Unitário

Verificou-se que, no processo de estimativa das ordenadas do hidrograma unitário, o Filtro de Kalman não conservou o volume unitário equivalente a uma altura excedentária de 10 mm, apresentando em alguns casos ordenadas negativas para o hidrograma unitário, o que representa uma incoerência física.

Tendo em vista métodos como otimização multiquadrática em MINE (1985) que permitem a consideração de restrições, introduziu-se no algoritmo do Filtro de Kalman, um procedimento colocando como restrições:

- a) as ordenadas do hidrograma unitário não podem ser negativas;

b) o volume unitário deve ser conservado em cada intervalo de tempo.

Descreve-se, a seguir, de modo resumido o procedimento proposto e que foi aplicado em cada intervalo de tempo. O primeiro passo consistiu em pesquisar o mínimo valor entre as ordenadas do hidrograma unitário estimado. Quando o mínimo valor entre as ordenadas era negativo, somava-se o seu valor em módulo a todas as ordenadas, garantindo a não negatividade.

O segundo passo consistiu em calcular um fator de correção definido pela divisão do volume unitário correspondente a uma altura efetiva de 10 mm pelo volume do hidrograma unitário estimado. Este fator de correção multiplicava todas as ordenadas, garantindo a manutenção do volume unitário.

### 3.6 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DE MODELO AUTOREGRESSIVO COM BASE NO FILTRO DE KALMAN

Como mencionado no item 3.5, a aplicação do método do Filtro de Kalman exige a definição dos seguintes parâmetros:

$\phi_t$  = matriz de transição de estado;

$x_t$  = estado do sistema;

$H_t$  = matriz de transição;

$z_t$  = observação do estado  $x_t$ .

Considerando-se o problema de estimativa de vazões em tempo real, um modelo autoregressivo de ordem  $p$  pode ser representado genericamente, conforme a seguir.

$$\tilde{q}_t = \phi_1 \tilde{q}_{t-1} + \phi_2 \tilde{q}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{q}_{t-p} \quad (3.27)$$

onde:  $\tilde{q}_t$  = desvio da vazão em relação à média no instante  $t$ ;

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  = parâmetros do modelo autoregressivo.

A Equação 3.27 pode ser expressa matricialmente como se segue:

$$\tilde{q}_t = \phi_p \cdot \tilde{q}_{t-p} \quad (3.28)$$

onde:  $\phi_p = [ \phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_p ]$ ;

$\tilde{q}_{t-p} = [ \tilde{q}_{t-1} \ \tilde{q}_{t-2} \ \dots \ \tilde{q}_{t-p} ]^T$

Comparando-se a Equação 3.28 com a equação de mensuração, Equação 3.2, pode-se definir:

$z_t$  = desvio da vazão em relação à média no instante  $t$ ;

$H_t$  = desvio das vazões observadas em relação à média  
(inputs do sistema);

$x_t$  = parâmetros do modelo autoregressivo.

A matriz de transição de estado, presente na Equação 3.1, no caso da determinação dos parâmetros do modelo autoregressivo, foi definida como igual a matriz identidade e invariante no tempo.

O procedimento para a obtenção e atualização dos parâmetros do modelo autoregressivo, considerando-se uma série de eventos de vazão, é resumido a seguir:

- 1ª) a cada intervalo de tempo é lido um novo valor de vazão  $q_t$  e calculado seu desvio em relação à média;
- 2ª) determina-se uma nova matriz de transição  $H_t$ , cujo produto pelo vetor  $x_t$ , composto pelos parâmetros do modelo autoregressivo, produz uma estimativa  $z_t$  para o desvio da vazão em relação à média no instante  $t$ ;
- 3ª) a partir dos valores observado  $q_t$  e estimado  $z_t$  no instante  $t$ , aplica-se os algoritmos do Filtro de Kalman, apresentados nos Quadros 3.1 e 3.2;

O procedimento descrito é repetido, considerando-se o número de eventos selecionados para a determinação do modelo autoregressivo.

Na aplicação apresentada na presente dissertação o número de parâmetros do modelo autoregressivo a serem estimados e corrigidos em tempo real foi de 2 valores. As dimensões, em termos matriciais, das grandezas envolvidas no processo de estimativas dos parâmetros foram:

- .estado do sistema ( $x_t$ ):  $[2 \times 1]$ ;
- .erro do sistema ( $w_t$ ):  $[1 \times 1]$ ;

.covariância dos erros do sistema ( $Q_t$ ): [1x1];  
 .observação do estado do sistema ( $z_t$ ): [1x1];  
 .erro de observação ( $v_t$ ): [1x1]  
 .covariância dos erros de observação ( $R_t$ ): [1x1];  
 .covariância dos erros de estimativa ( $P_t$ ): [2x2].

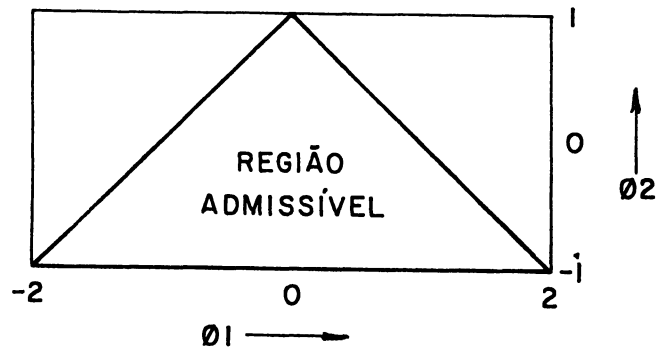
### 3.6.1 Procedimento para Correção dos Parâmetros do Modelo Autoregressivo

Verificou-se que, no processo de estimativa dos parâmetros, o Filtro de Kalman estabeleceu valores para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  que não satisfazem os limites apresentados em BOX e JENKINS (1976), que representam a condição de estacionariedade para modelos autoregressivos de ordem 2.

Procurou-se adotar um procedimento para garantir os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dentro dos limites apresentados em BOX e JENKINS (1976). Para tanto, introduziu-se no algoritmo do Filtro de Kalman, um procedimento colocando restrições para os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . A Figura 3.3 apresenta o domínio de validade dos parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  para um modelo autoregressivo de ordem 2.

Descreve-se, a seguir, de modo resumido o procedimento proposto e que foi aplicado em cada intervalo de tempo.

FIGURA 3.3 - DOMÍNIO DE VALIDADE DOS PARÂMETROS  $\phi_1$  E  $\phi_2$  PARA UM MODELO AUTOREGRESSIVO DE ORDEM 2.



O primeiro passo consistiu em verificar se os parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  satisfaziam às restrições a seguir.

$$-2 < \phi_1 < 2 \quad \text{e} \quad -1 < \phi_2 < 1$$

Caso a estimativa dos parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  não satisfizesse as restrições acima, seu valor era alterado para o valor limite mais próximo do valor estimado.

O segundo passo consistiu em verificar se os parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  satisfaziam às restrições a seguir.

$$\phi_1 + \phi_2 > 1 \quad \text{e} \quad \phi_2 - \phi_1 < 1$$

Caso a estimativa dos parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  não satisfizesse às restrições, estabelecia-se dois conjuntos de parâmetros. O primeiro

conjunto formado pelo valor de  $\phi_1$  estimado e pelo valor de  $\phi_2$  alterado para satisfazer às restrições. O segundo conjunto formado pelo valor de  $\phi_2$  estimado e pelo valor de  $\phi_1$  alterado para satisfazer às restrições.

A escolha do conjunto de parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  a ser adotado foi feita considerando-se o conjunto que produzia a melhor estimativa da vazão no intervalo considerado.

### 3.7 ESTATÍSTICA UTILIZADA PARA A AVALIAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman foi utilizado para estimativa e correção em tempo real das ordenadas do hidrograma unitário e dos parâmetros de um modelo autoregressivo, utilizando-se dados referentes a 15 eventos de cheia registrados na bacia do rio Jangada, afluente do rio Iguaçu.

A avaliação dos resultados apresentados na aplicação do Filtro de Kalman para a previsão da vazão em tempo real foi realizada usando-se como parâmetro de comparação a raiz do erro quadrático médio, considerando-se as diferenças entre os valores observados e estimados de vazão para os eventos de números 11 a 15.

Os eventos de número 1 a 10 foram utilizados como um aquecimento do modelo, correspondente a uma fase de calibração, na tentativa de minimizar a influência das hipóteses relativas ao



estado inicial do sistema e, portanto, não foram utilizados no cálculo da raiz do erro quadrático médio.

A raiz do erro quadrático médio foi calculado pela expressão a seguir.

$$REQM = \sqrt{\frac{\sum (q_{obs} - q_{est})^2}{n}} \quad (3.29)$$

onde: **REQM** = raiz do erro quadrático médio;

**q<sub>obs</sub>** = vazão observada;

**q<sub>est</sub>** = vazão estimada;

**n** = número de valores estimados e observados.

O procedimento descrito para a avaliação do Filtro de Kalman foi utilizado na obtenção das ordenadas do hidrograma unitário e na determinação dos parâmetros do modelo autoregressivo.

#### 4 CARACTERIZAÇÃO DA BACIA HIDROGRÁFICA E DADOS UTILIZADOS

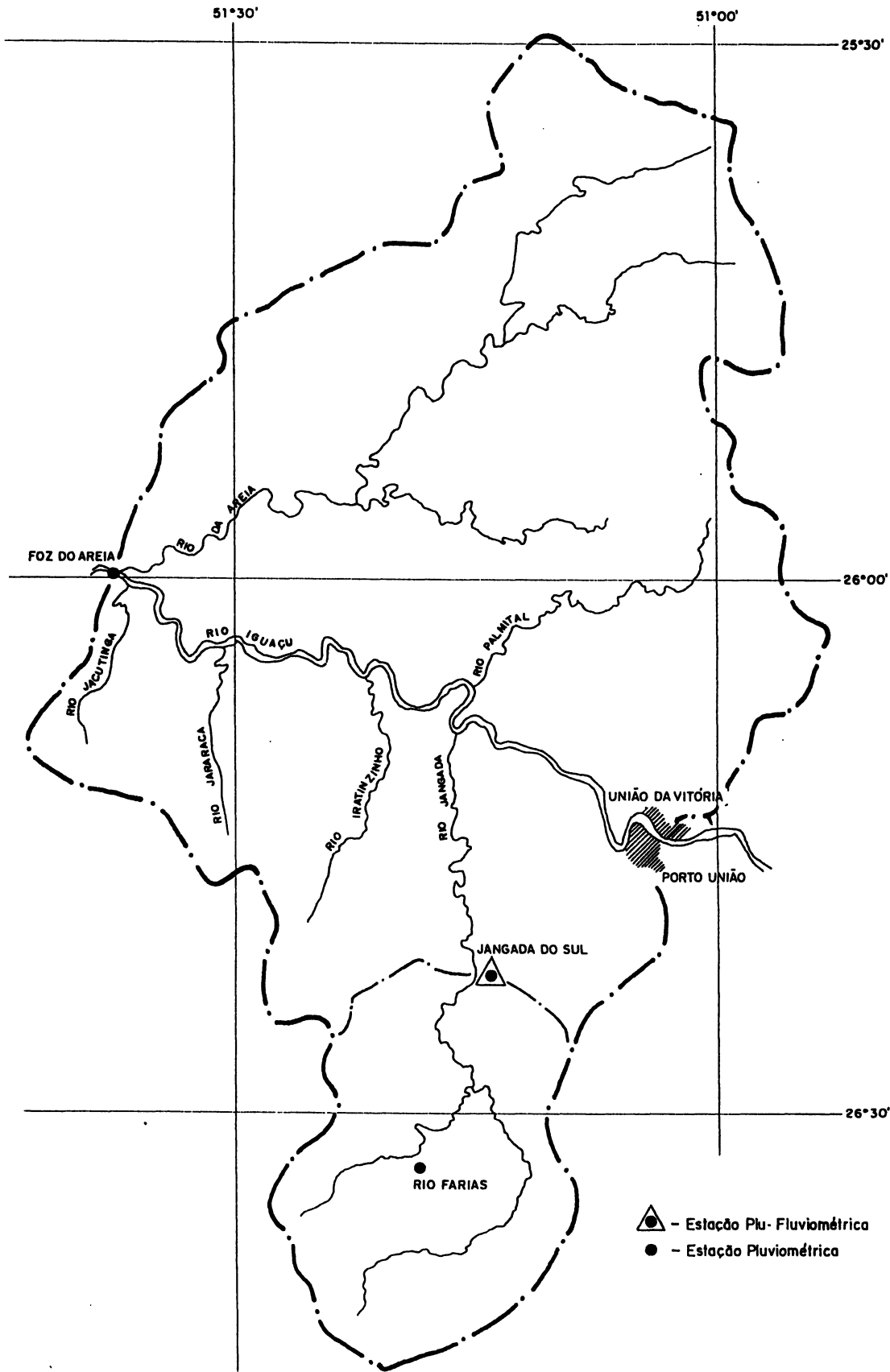
O objetivo deste capítulo é apresentar a bacia hidrográfica do rio Jangada, bem como, as estações hidrométricas e os dados utilizados, destacando os procedimentos adotados para a obtenção do escoamento superficial e da precipitação efetiva, em virtude da utilização do Filtro de Kalman para a estimativa e correção das ordenadas do hidrograma unitário.

##### 4.1 RIO JANGADA

O rio Jangada situa-se no trecho médio do rio Iguaçu, do qual é afluente pela margem esquerda, percorrendo no seu desenvolvimento o norte catarinense e o terceiro planalto paranaense, conforme apresentado na Figura 4.1.

Esta região é constituída de derrames basálticos espessos, regulares e quase horizontais e por arenitos mesozóicos. Os rios percorrem vales estreitos e possuem maiores declividades em relação ao trecho do Alto Iguaçu, a montante da cidade de União da Vitória. Em um trecho de aproximadamente 60 km, a partir de sua foz no rio Iguaçu, apresenta um desnível de 170 m, correspondente a uma declividade média no trecho de 0,283 cm/m.

FIGURA 4.1 - BACIA HIDROGRÁFICA DO RIO JANGADA E ESTAÇÕES HIDROMÉTRICAS UTILIZADAS



O clima apresenta-se temperado com verão ameno e sem estação seca definida. A precipitação média anual na região é de 1.500 mm e a temperatura média anual é de 16 °C, com valores extremos variando entre -5 °C e 38 °C.

#### 4.2 DADOS DISPONÍVEIS

Os dados de precipitação utilizados são referentes à Estação Pluviométrica Rio Farias (Código DNAEE: 02651027), sendo registrados os dados de chuvas às 7:00h e 17:00h, limitando o intervalo de tempo do estudo em 12 horas.

Os dados de vazão utilizados são referentes à Estação Fluviométrica Jangada do Sul (Código DNAEE: 65370000), latitude 26° 22'S, Longitude 51° 15'W e altitude 800 m, compreendendo uma área de drenagem de aproximadamente 1050 Km<sup>2</sup>, com leituras diárias efetuadas às 7:00h e 17:00h. Considerou-se o período mais recente de observações, compreendendo os anos de 1983 a 1992.

O trecho do rio Jangada, onde se situa a Estação Fluviométrica, caracteriza-se por apresentar trecho reto, lento em canal natural, com margens argilosas de pouca inclinação e com vegetação (árvores em ambas as margens). A natureza do leito é rochosa sendo o controle exercido por corredeira a 150 m a jusante da seção de réguas.

A cota de extravazamento considerada é de 3,00 m, sendo que na determinação da curva chave os máximos valores de medição de nível e vazão foram de aproximadamente 2,50 m e 360 m<sup>3</sup>/s, respectivamente.

#### 4.3 CARACTERIZAÇÃO DOS EVENTOS

A partir do registro histórico, foram selecionados 15 eventos que representam uma gama variada de vazões, incluindo a enchente de julho de 1983 que corresponde à máxima enchente registrada na Estação Fluviométrica Jangada do Sul.

O Apêndice 1 apresenta os eventos selecionados, no que se refere aos valores de vazão total, vazão superficial e precipitação efetiva. A Tabela 4.1 apresenta as características principais dos 15 eventos selecionados.

Os eventos 01 a 10 foram considerados como eventos de calibração, enquanto os eventos de 11 a 15 foram considerados eventos de verificação. Como observa-se na Tabela 4.1, os eventos não obedecem a uma sequência cronológica. Procurou-se montar os dois conjuntos de eventos com cheias de diferentes magnitudes. A enchente de Julho de 1983 foi escolhida como o último evento por representar a cheia máxima registrada na bacia.

TABELA 4.1 - CARACTERÍSTICAS DOS EVENTOS SELECIONADOS

EVENTO	INÍCIO	CHUVA TOTAL (mm)	VAZÃO SUPERF. (mm)	COEFIC. DEFLUVIO	VAZÃO MÁXIMA (m³/s)	TEMPO PICO (h)
01	26/10/89	79,0	15,35	0,19	107,39	36
02	20/01/90	130,1	39,32	0,30	223,29	36
03	28/04/90	100,2	30,00	0,30	207,79	24
04	18/06/90	81,6	24,87	0,30	173,19	24
05	22/10/88	74,8	20,88	0,28	177,00	24
06	03/05/89	111,5	26,32	0,24	135,39	48
07	15/08/90	115,0	45,62	0,40	312,00	24
08	12/12/90	89,8	21,63	0,24	154,19	24
09	05/10/91	155,6	25,80	0,17	221,00	12
10	24/09/84	90,0	19,85	0,22	154,19	24
11	06/07/87	57,3	11,81	0,21	83,55	36
12	31/10/85	49,8	13,46	0,27	119,29	24
13	05/08/84	154,1	57,45	0,37	279,50	48
14	12/06/84	173,8	58,75	0,34	262,39	60
15	05/07/83	429,8	301,44	0,70	970,39	60

Analisando-se os valores de coeficiente de deflúvio, verifica-se que o evento 15 apresenta coeficiente significativamente superior aos demais. Um fator que contribui para este alto valor é a incerteza associada à extrapolação da curva chave, principalmente no tocante ao extravazamento da calha do rio.

4.4 DETERMINAÇÃO DO ESCOAMENTO SUPERFICIAL

A determinação do fim do escoamento superficial foi feita utilizando-se o conceito de curva de depleção do escoamento

subterrâneo, que reflete as características do escoamento do subsolo de cada região, representada pela equação a seguir.

$$q_i = q_s e^{-\alpha(t_i - t_s)} \quad (4.1)$$

onde:  $q_i$  = vazão no instante  $t_i$ ;

$q_s$  = vazão correspondente ao final do escoamento superficial;

$t_s$  = instante correspondente ao fim do escoamento superficial;

$\alpha$  = expoente da curva de depleção, função de características geológicas.

Em uma primeira tentativa, procurou-se obter um valor médio para a constante de depleção  $\alpha$  e que seria utilizada para todos os eventos. Para tanto, procurou-se analisar os períodos de estiagem registrados na Estação Fluviométrica Jangada do Sul.

Em virtude do fato de que os períodos de estiagem na Bacia do rio Iguaçu são normalmente curtos, não foi possível obter um valor médio para  $\alpha$ , característica da bacia hidrográfica.

A alternativa adotada foi analisar separadamente os 15 eventos selecionados. Para cada evento, procurou-se plotar os valores de vazão do ramo de recessão do hidrograma em papel monolog, procurando-se identificar o final do escoamento superficial.

A curva de depleção do escoamento subterrâneo, Equação 4.1, em papel monolog é representada por uma reta. Portanto, adotou-se como fim do escoamento superficial o instante no qual a vazão plotada fugia da tendência linear do ramo de recessão.

A partir da definição do fim do escoamento superficial, a separação dos escoamentos foi realizada utilizando-se o método da linha reta que supõe uma variação linear do escoamento subterrâneo entre os instantes inicial e final do escoamento superficial.

Os dados de precipitação efetiva foram obtidos, considerando-se como hipótese simplificadora, um valor de infiltração constante para cada evento hidrológico, calculado de modo a fornecer o mesmo volume obtido após a separação dos escoamentos superficial e subterrâneo.



## 5 RESULTADOS DA PREVISÃO DOS MODELOS COM O USO DO FILTRO DE KALMAN

O método do Filtro de Kalman foi aplicado na estimativa e correção em tempo real das ordenadas do hidrograma unitário e dos parâmetros do modelo autoregressivo, dois modelos de uso corrente em hidrologia, utilizando-se os 15 eventos hidrológicos selecionados e apresentados no Apêndice 1.

O intervalo unitário utilizado foi de 12 horas em função da frequência de observações (2 leituras diárias) das estações hidrométricas. Uma análise dos eventos selecionados, principalmente no tocante ao ramo de ascensão dos hidrogramas, mostra que o intervalo de tempo adotado não é o mais indicado para representação dos eventos de cheia para a bacia em questão, limitando os resultados da previsão em tempo real. Por exemplo, no caso do modelo autoregressivo, para alguns eventos, tinha-se somente um ou dois valores de vazão observada para corrigir as estimativas do ramo de ascensão.

Uma alternativa seria a utilização de um processo interpolativo para diminuir o intervalo de tempo adotado, o que a rigor não acrescenta informação nova ao conjunto de dados. Tal alternativa não foi adotada pelo fato de que, no caso do hidrograma unitário, as dimensões das matrizes ficariam muito grandes e, no caso do modelo autoregressivo, criaria-se uma estrutura de dependência entre as vazões interferindo no comportamento do modelo autoregressivo.

Em uma primeira análise, verificou-se o desempenho do algoritmo do **Filtro de Kalman** sem correção das estatísticas dos ruídos, conforme apresentado no Quadro 3.1. Em seguida, introduziu-se as restrições impostas aos modelos, descritas nos itens 3.5.1 e 3.6.1, procurando-se avaliar a sua influência na qualidade dos resultados. Finalmente, verificou-se o comportamento do **Filtro de Kalman** com correção das estatísticas dos ruídos, conforme apresentado no Quadro 3.2, em conjunto com as restrições impostas ao modelos.

Como já mencionado no item 3.7, o desempenho dos modelos foi analisado pela comparação dos valores da raiz do erro quadrático médio (REQM) calculada a partir das vazões estimadas e observadas, referentes aos eventos de números 11 a 15. Os eventos de números 1 a 10 foram utilizados para um aquecimento do modelo com o objetivo de minimizar a influência das hipóteses quanto aos valores iniciais das variáveis que compõem o **Filtro de Kalman**.

## 5.1 ESTIMATIVA DAS ORDENADAS DO HIDROGRAMA UNITÁRIO

Este item apresenta os resultados da aplicação do **Filtro de Kalman** na estimativa e correção em tempo real das ordenadas do hidrograma unitário. Os dados de precipitação efetiva e vazão superficial, apresentados no Apêndice 1, foram obtidos conforme expresso no Capítulo 4. Apresenta-se, ainda, o procedimento adotado para a estimativa inicial das ordenadas do hidrograma unitário.

### 5.1.1 Estimativa Inicial do Hidrograma Unitário

A aplicação do Filtro de Kalman exige a estimativa do estado inicial do sistema. Na presente dissertação, adotou-se a hipótese de um hidrograma triangular como forma inicial do hidrograma unitário com um tempo de pico de 1 dia. HINO (1973) utiliza, inclusive, a hipótese de ordenadas nulas como aproximação inicial.

A observação dos dados de precipitação efetiva e vazão superficial sugerem um tempo de base de 6 dias que com a utilização de um intervalo unitário de 12 horas, corresponde a um hidrograma composto por 11 ordenadas.

Considerando-se, portanto, um hidrograma unitário triangular com tempo de base definido, pode-se calcular o valor da vazão de pico  $q_p$  do hidrograma, de modo a produzir um volume equivalente a uma altura excedentária de 10 mm para uma área de drenagem de aproximadamente 1050 km<sup>2</sup>.

O valor de  $q_p$  obtido foi de 40,51 m<sup>3</sup>/s, por hipótese ocorrendo dois intervalos de tempo (1 dia) após o início da precipitação. A aproximação inicial do hidrograma unitário é apresentada na Tabela 5.1, onde as demais ordenadas do hidrograma foram obtidas por interpolação linear a partir da vazão de pico.

TABELA 5.1- ESTIMATIVA INICIAL DO HIDROGRAMA UNITÁRIO.

i ( $\Delta t=12\text{ h}$ )	h ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	i ( $\Delta t=12\text{h}$ )	h ( $\text{m}^3/\text{s}$ )
1	20,26	7	20,26
2	40,51	8	16,20
3	36,46	9	12,15
4	32,41	10	8,10
5	28,36	11	4,05
6	24,31		

A partir da estimativa inicial do hidrograma unitário, apresentada na Tabela 5.1 e dos valores de precipitação efetiva, apresentados no Apêndice 1, fez-se a previsão de vazão para os eventos de números 11 a 15. Considerando-se os valores de vazão observados e estimados através da aproximação inicial para o hidrograma unitário, obteve-se a raiz do erro quadrático médio (REQM) de 68,45  $\text{m}^3/\text{s}$ .

Considerou-se a estimativa do hidrograma, apresentada na Tabela 5.1, como sendo a aproximação inicial das ordenadas do hidrograma unitário a serem atualizadas pelo método do Filtro de Kalman. Na sequência, aplicou-se o Filtro de Kalman para a correção dos parâmetros em tempo real, procurando-se verificar se o mesmo diminuía a raiz do erro quadrático médio (REQM) calculada a partir da aproximação inicial.

### 5.1.2 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e sem Restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman, resumido no Quadro 3.1, não estabelece a correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ . Considerou-se por hipótese que as matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  são constantes no tempo e que os ruídos  $w$  e  $v$  constituem série de ruídos brancos representados pelo seu valor médio igual a zero.

O algoritmo apresentado no Quadro 3.1 atualiza a matriz de covariância dos erros de estimativa  $P$  a medida em que uma nova observação é obtida. Considerou-se como valor inicial para a matriz  $P$ , a matriz identidade.

Partindo-se da hipótese de  $Q$  e  $R$  constantes no tempo, o problema passou a ser determinar os valores de  $Q$  e  $R$  que produzem a melhor aproximação entre as vazões observadas e estimadas pela aplicação do Filtro de Kalman.

Inicialmente, teve-se por objetivo determinar qual a relação  $Q/R$  que produzia a menor REQM. Para tanto, adotou-se  $R = 0,01$  e para várias relações de  $Q/R$ , aplicou-se o Filtro de Kalman na correção das ordenadas do hidrograma unitário e calculou-se a raiz do erro quadrático médio (REQM).

A Tabela 5.2 apresenta o valor da REQM, para  $R = 0,01$  e várias relações de  $Q/R$ . Analisando-se a Tabela 5.2, nota-se que a menor REQM é dada pela relação  $Q/R = 0$ , o que implica em considerar desprezíveis os erros de modelagem representados pela matriz  $Q$ .

TABELA 5.2- VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA  $R = 0,01$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.

Q/R	0	0,01	0,1	1	10	100
REQM(m <sup>3</sup> /s)	37,76	43,02	50,21	60,34	62,83	68,75

A partir da definição da melhor relação  $Q/R$ , pesquisou-se o valor de  $R$  que conduzissem à menor raiz do erro quadrático médio (REQM). Para tanto, variou-se o valor de  $R$  mantendo-se constante a relação  $Q/R = 0$ . A Tabela 5.3 apresenta o valor da REQM para vários valores de  $R$  e relação  $Q/R = 0$ .

TABELA 5.3- VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA  $Q/R = 0$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.

R	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
REQM(m <sup>3</sup> /s)	37,76	37,75	37,69	37,43	43,75	62,01	67,68

Analisando-se a Tabela 5.3, nota-se que o valor de  $R$  igual a 10 produziu o menor valor de REQM. Comparando-se os valores de REQM apresentados nas Tabelas 5.2 e 5.3, verifica-se que o desempenho do modelo constituído pelo hidrograma unitário com correção das ordenadas pelo Filtro de Kalman foi superior ao resultado apresentado pela aproximação inicial do hidrograma, onde obteve-se uma REQM de 68,45 m<sup>3</sup>/s, conforme descrito em 5.1.1.

No processo de atualização e correção das ordenadas, verificou-se que, em alguns intervalos de tempo, o modelo apresentava ordenadas negativas e não conservava o volume unitário de 10 mm, o que sugeriu a adoção de restrições, conforme apresentado no item 3.5.1.

#### 5.1.3 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições

Este item apresenta os resultados obtidos na utilização do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância, apresentado no Quadro 3.1, a partir da adoção de restrições aos valores das ordenadas do hidrograma unitário, conforme descrito no item 3.5.1.

Inicialmente, como no item 5.1.2, teve-se por objetivo determinar a relação  $Q/R$  que produzia a melhor aproximação entre as vazões observadas e estimadas através do Filtro de Kalman. Novamente, adotou-se  $R = 0,01$  e calculou-se, para várias relações de  $Q/R$ , a raiz do erro quadrático médio (REQM), considerando-se os eventos de números 11 a 15.

A Tabela 5.4 apresenta a REQM fixando-se  $R = 0,01$  e adotando-se várias relações  $Q/R$ . Novamente, o melhor resultado foi obtido para a relação  $Q/R = 0$ .

TABELA 5.4- VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA R = 0,01. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

Q/R	0	0,01	0,1	1	10	100
REQM(m³/s)	40,18	40,85	78,14	96,18	99,90	101,37

A partir da definição da melhor relação Q/R, pesquisou-se o valor de R que conduzissem à menor REQM. Para tanto, variou-se o valor de R mantendo-se constante a relação Q/R = 0. A Tabela 5.5 apresenta o valor da REQM para vários valores de R e para relação Q/R = 0, considerando-se a utilização das restrições citadas anteriormente no item 3.5.1. De acordo com os resultados apresentados na Tabela 5.5, a menor REQM também correspondeu ao valor de R = 10, confirmando os resultados apresentados na Tabela 5.3.

TABELA 5.5- VALOR DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA Q/R = 0. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

R	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
REQM(m³/s)	40,18	40,16	39,96	38,99	43,51	61,64	67,63

Comparando-se os menores valores de REQM, apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.5, verifica-se que a adoção das restrições de não negatividade das ordenadas e da manutenção do volume unitário não reduziu a REQM, visto que a mesma foi de 37,43 m³/s e 38,99 m³/s, para os algoritmos sem restrições e com restrições, respectivamente. Portanto, a adoção de restrições não melhorou o desempenho do filtro, porém, garantiu o atendimento aos conceitos básicos de ordenadas não negativas e de volume unitário de 10 mm.



Os valores estimados pela aproximação inicial, portanto sem a aplicação do método do Filtro de Kalman que permite a atualização das ordenadas em tempo real, produziu uma REQM de 68,45 m<sup>3</sup>/s, conforme apresentado no item 5.1.1. Com a adoção do Filtro de Kalman e das restrições de não negatividade e manutenção do volume unitário, a REQM foi reduzida para 38,99 m<sup>3</sup>/s, mostrando um ganho na aproximação entre valores de vazão observados e estimados.

A seguir apresenta-se a utilização do algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ , apresentado no Quadro 3.2, e com utilização das restrições quanto aos valores das ordenadas do hidrograma unitário, conforme descrito no item 3.5.1.

#### 5.1.4 Algoritmo do Filtro de Kalman com Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman, resumido no Quadro 3.2, estabelece a correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  em tempo real, portanto, mais genérico que o algoritmo apresentado no Quadro 3.1. Adicionalmente, introduziu-se o mesmo procedimento apresentado no item 3.5.1 com a finalidade de garantir a não negatividade das ordenadas e a manutenção do volume unitário equivalente a uma altura excedentária de 10 mm.

Os valores de precipitação, vazão e aproximação inicial das ordenadas do hidrograma unitário foram os mesmos utilizados anteriormente. Novamente a análise dos resultados foi feita pelo cálculo da raiz do erro quadrático médio (REQM), comparando-se as vazões observadas e estimadas pela aplicação do Filtro de Kalman, considerando-se os eventos de números 11 a 15.

O valor de REQM obtido pela aplicação do Filtro de Kalman com correção das estatísticas dos ruídos, conforme Quadro 3.2, e com a adoção de restrições foi de 62,29 m<sup>3</sup>/s, reduzindo, portanto, o valor de REQM calculado, considerando-se a aproximação inicial, que foi de 68,45 m<sup>3</sup>/s.

Comparando-se o valor obtido de REQM de 62,29 m<sup>3</sup>/s com valores de REQM apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.5, verifica-se que o algoritmo do Filtro de Kalman sem a correção dos ruídos e das matrizes de covariância, conforme Quadro 3.1, e com  $Q/R = 0$  apresenta melhores resultados para R entre 0,01 e 1000.

A Tabela 5.6 apresenta ao final de cada evento, os valores dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ . Os valores dos ruídos  $w$  e  $v$  convergiram para valores bastante aceitáveis quando comparados à ordem de grandeza das ordenadas do hidrograma unitário e das vazões observadas. Analisando-se a Tabela 5.6, verifica-se que os valores da matriz de covariância  $Q$  são desprezíveis em relação aos valores de  $R$ , confirmando os resultados anteriores que indicaram os menores erros para a relação  $Q/R = 0$ .

TABELA 5.6- VALORES DOS RUÍDOS  $w$  E  $v$  E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA  $Q$  E  $R$  APÓS CADA EVENTO. FILTRO DE KALMAN COM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

Evento	$w$ (x 1 E-2)	$Q$ (x 1 E-5)	$v$	$R$
1	- 2,0	- 3,2	0,42	148,8
2	- 2,1	4,1	0,21	325,4
3	- 2,1	5,8	0,18	979,8
4	- 2,2	5,7	0,16	1285,3
5	- 2,2	5,7	0,14	1317,8
6	- 2,2	5,4	0,13	1167,5
7	- 2,2	6,6	0,15	1301,0
8	- 2,2	6,4	0,14	1282,5
9	- 2,2	6,6	0,14	1490,6
10	- 2,2	6,4	0,13	1400,9
11	- 2,2	6,4	0,13	1294,4
12	- 2,2	6,3	0,12	1233,0
13	- 2,2	7,5	0,13	1383,9
14	- 2,2	7,0	0,13	1295,3
15	- 2,3	70,2	0,35	2409,9

Considerando-se que a matriz  $R$  representa a matriz de co-variância dos erros de observação, é lógico esperar que quanto maior a grandeza das vazões observadas maior o erro de observação. Justifica-se, portanto, o valor de  $R$  relativamente alto para o evento de número 15, conforme apresentado na Tabela 5.6, pelo fato das vazões observadas para o referido evento serem superiores às vazões observadas nos demais eventos.

#### 5.1.5 Comparação das Estimativas de Vazão pelo Hidrograma Unitário usando o Filtro de Kalman

Os resultados obtidos na estimativa de vazões pelo hidrograma unitário utilizando o **Filtro de Kalman**, até aqui apresentados, analisaram o valor da raiz do erro quadrático médio (REQM) calculado para os eventos de números 11 a 15 considerados em conjunto. Neste item faz-se uma apresentação e discussão dos resultados considerando-se os referidos eventos isoladamente.

A análise foi feita comparando-se as vazões observadas com as vazões estimadas por três modelos distintos, a saber:

MODELO HU1 Vazões estimadas pela aproximação inicial do hidrograma unitário apresentada na Tabela 5.1.

MODELO HU2 Vazões estimadas pelo hidrograma unitário corrigido pelo **Filtro de Kalman**, Quadro 3.1, e com restrições.  
Relação  $Q/R = 0$  e  $R = 10$ .

MODELO HU3 Vazões estimadas pelo hidrograma unitário corrigido pelo **Filtro de Kalman**, Quadro 3.2, e com restrições.

A Tabela 5.7 apresenta os valores de REQM para os eventos de números 11 a 15, considerando-se os três modelos citados.

TABELA 5.7- VALORES DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (m³/s) PARA OS EVENTOS 11 A 15 COM ESTIMATIVAS FEITAS PELO HI-DROGRAMA UNITÁRIO

EVENTO	RAIZ DO ERRO	QUADRÁTICO	MÉDIO (m³/s)
	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3
11	9,60	14,63	8,73
12	24,45	13,41	23,16
13	58,30	27,50	53,97
14	23,44	33,06	23,22
15	104,21	55,52	94,22
TOTAL	68,45	38,99	62,29

Analizando-se a Tabela 5.7, verifica-se que os Modelos HU2 e HU3, que utilizam a correção dos parâmetros em tempo real pelo Filtro de Kalman, apresentaram em relação ao Modelo HU1, melhores resultados para todos os eventos, com exceção feita ao Modelo HU2 nos eventos 11 e 14.

Outro aspecto a destacar é que o Modelo HU3, cujo algoritmo do Filtro de Kalman é apresentado no Quadro 3.2 e que permite a correção das estatísticas dos ruídos, acompanhou o desempenho do Modelo HU1, como pode ser visualizado nas Figuras 5.1 a 5.5 que apresentam os hidrogramas observado e estimados pelos três modelos.

Há que se ressaltar as limitações impostas pela adoção do hidrograma unitário para a estimativa de vazões. Conceitualmente, o hidrograma unitário é uma função linear onde uma das hipóteses básicas à sua definição é de que chuvas de mesmo tempo de duração produzem hidrogramas de mesmo tempo de base. O escoamento em canais é caracteristicamente não-linear. A velocidade de propagação da

onda de cheia é maior quanto maiores às vazões, isto sem considerar problemas de extravazamento de calha e armazenamento nas planícies de inundação.

Portanto, verifica-se que a inclusão do Filtro de Kalman não alterou as características inerentes ao próprio hidrograma unitário, observando-se que para pequenas cheias, notadamente o evento 11 apresentado na Figura 5.1, a tendência foi de se adiantar o pico, e para grandes cheias, notadamente o evento 15 apresentado na Figura 5.5, a tendência foi de atraso no pico.

Outra limitação na adoção do hidrograma unitário é a hipótese de chuva isolada na determinação do mesmo, hipótese difícil de ser respeitada para eventos mais significativos dependendo das dimensões da bacia em estudo.

Finalmente, na determinação da chuva efetiva, a hipótese adotada de taxa de infiltração constante tende a aumentar o volume escoado no início da onda de cheia e diminuí-lo no ramo de recesão. A influência da consideração de chuva isolada e taxa de infiltração constante ficou caracterizada ao observar-se o evento 14 apresentado na Figura 5.4, onde existe uma elevação das vazões para o intervalo de tempo igual a 11 e que os modelos não reproduziram.

FIGURA 5.1- EVENTO 11. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO

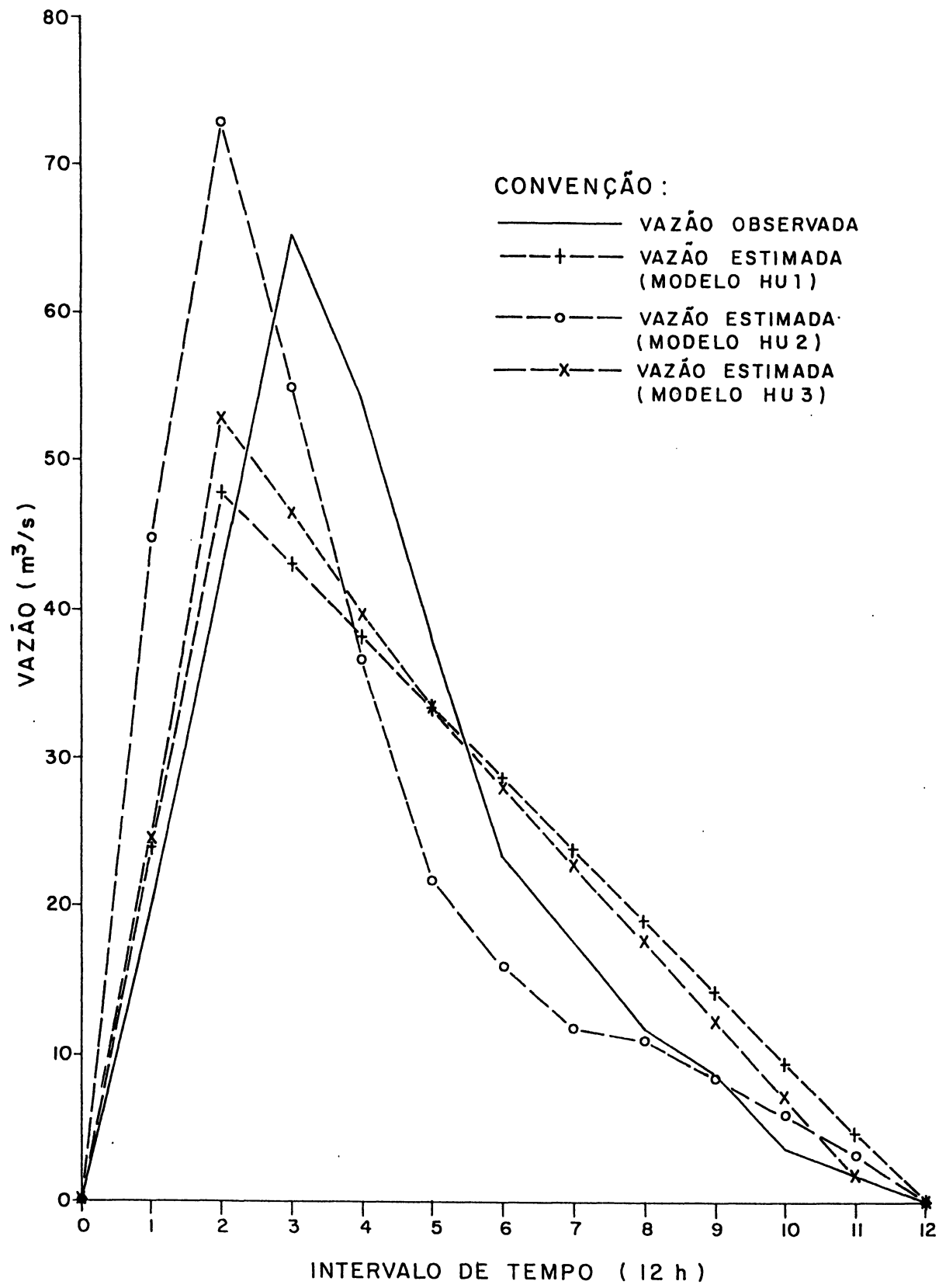


FIGURA 5.2- EVENTO 12. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO

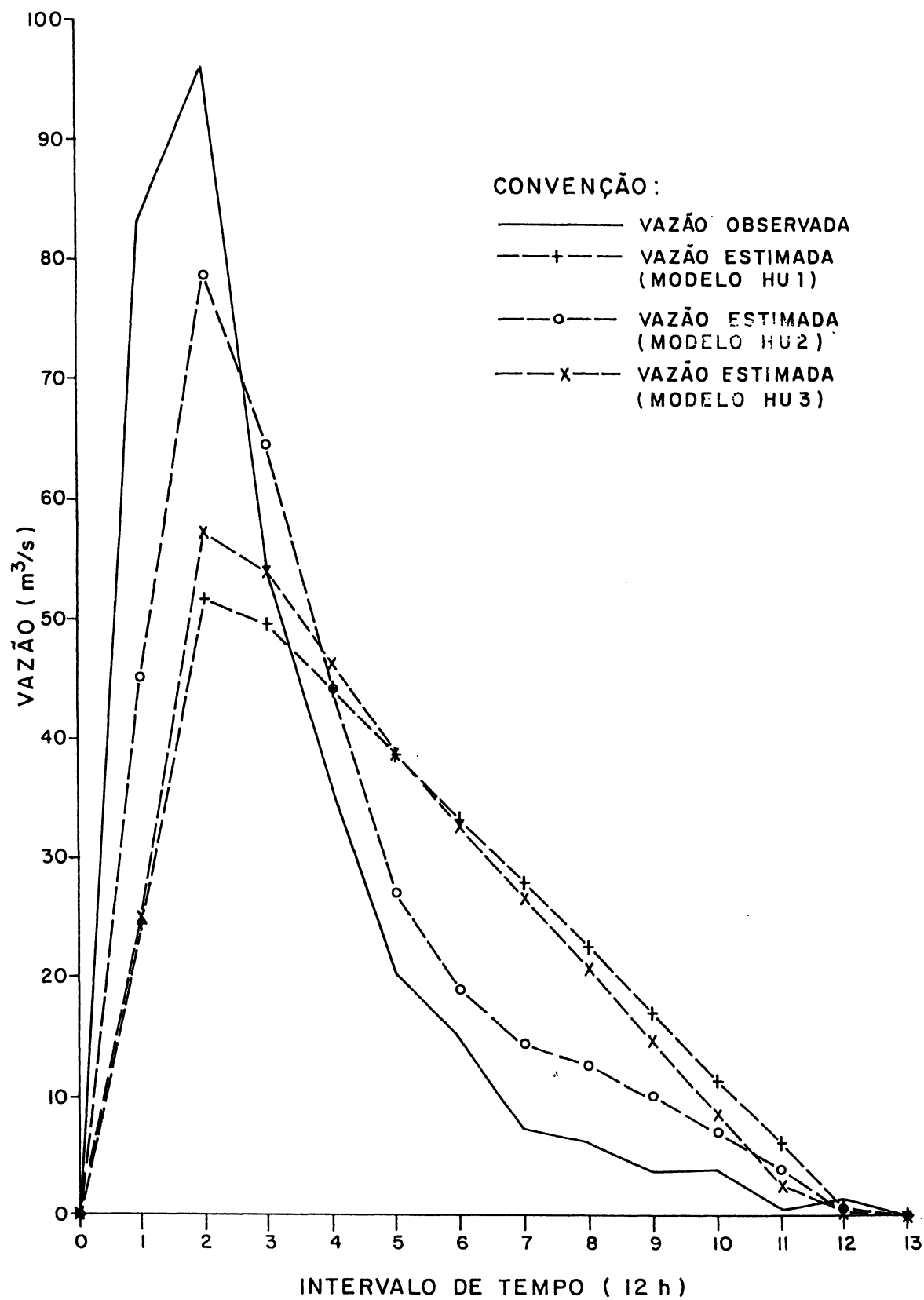




FIGURA 5.3- EVENTO 13. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO

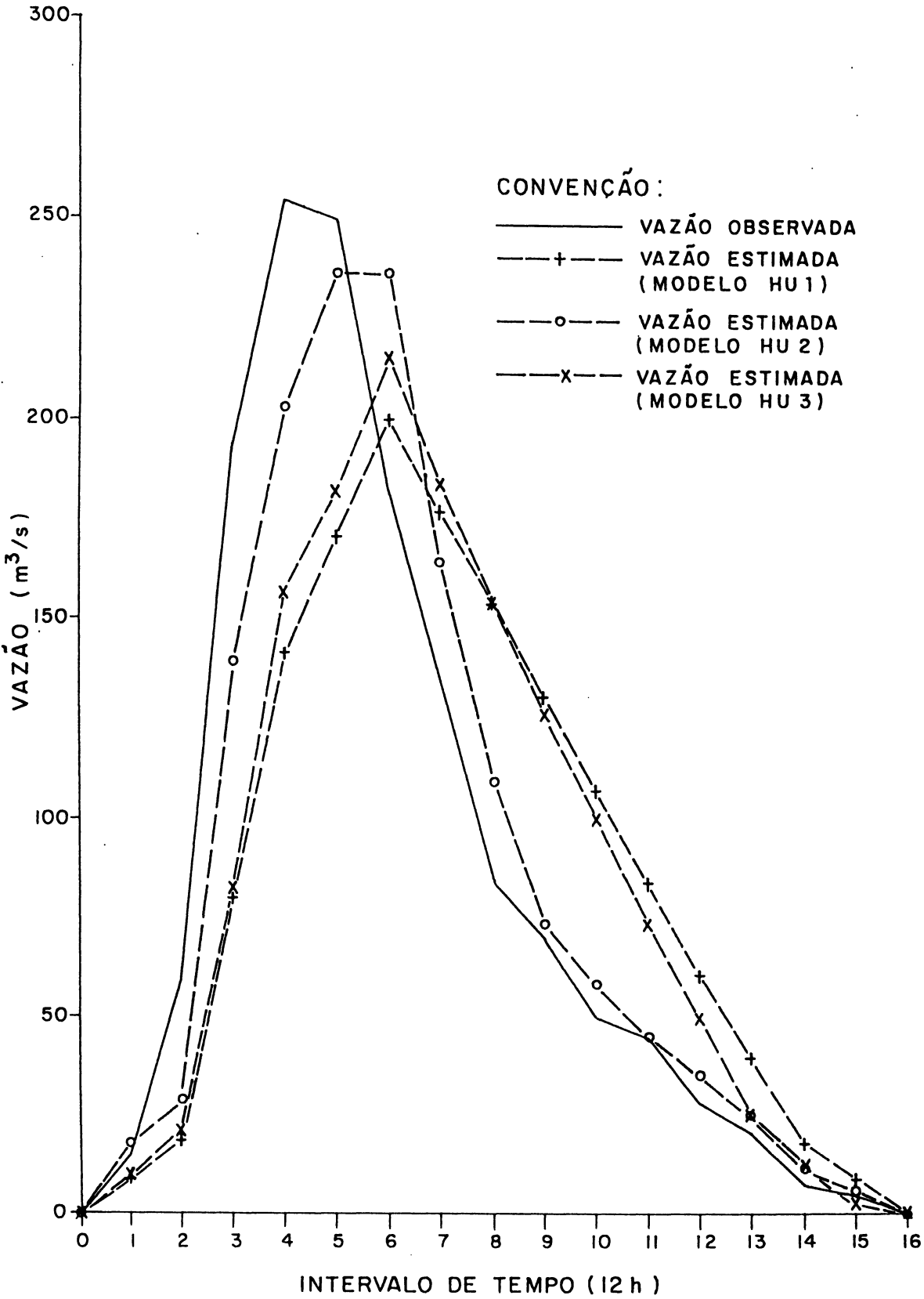


FIGURA 5.4- EVENTO 14. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO

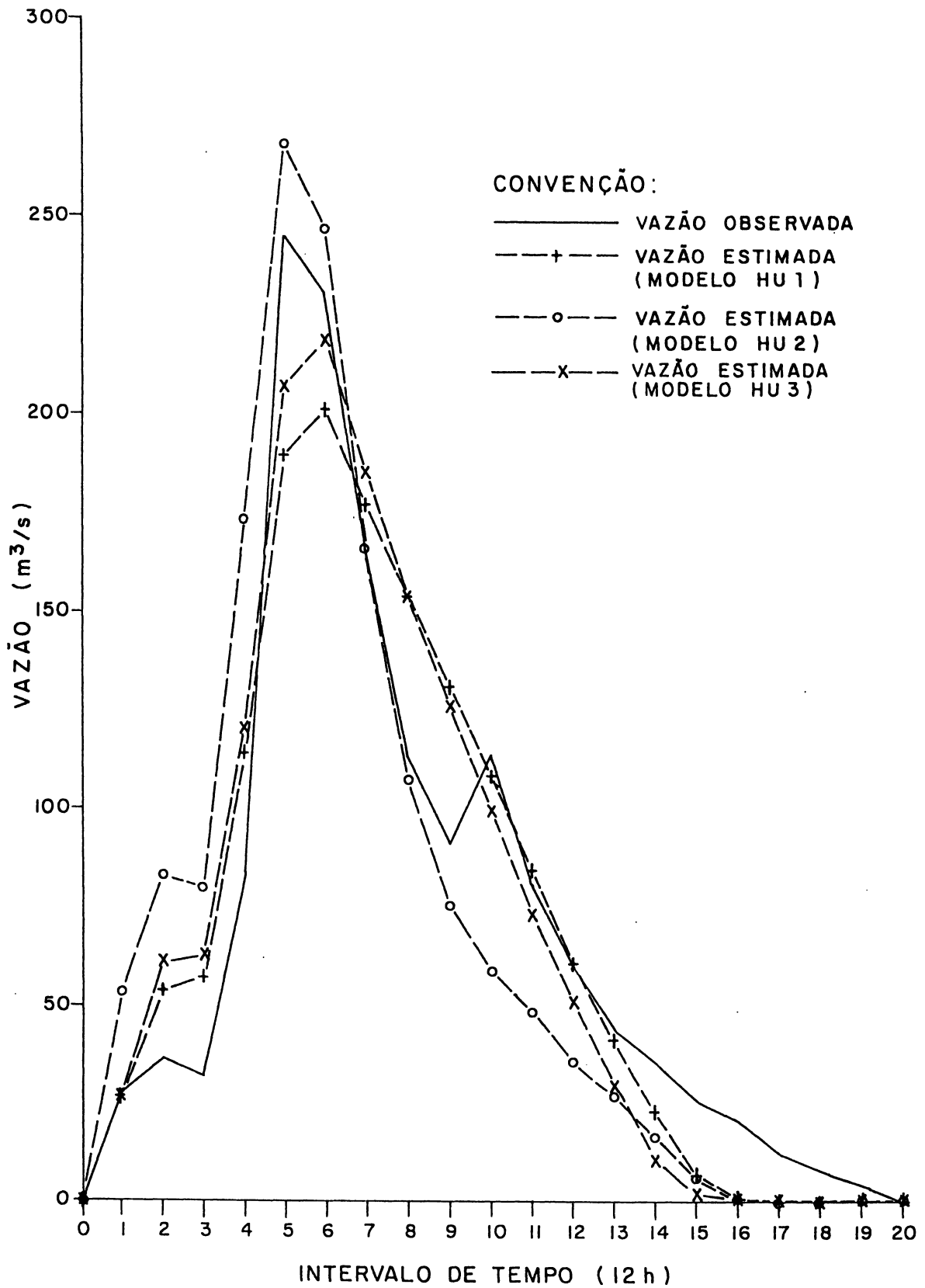
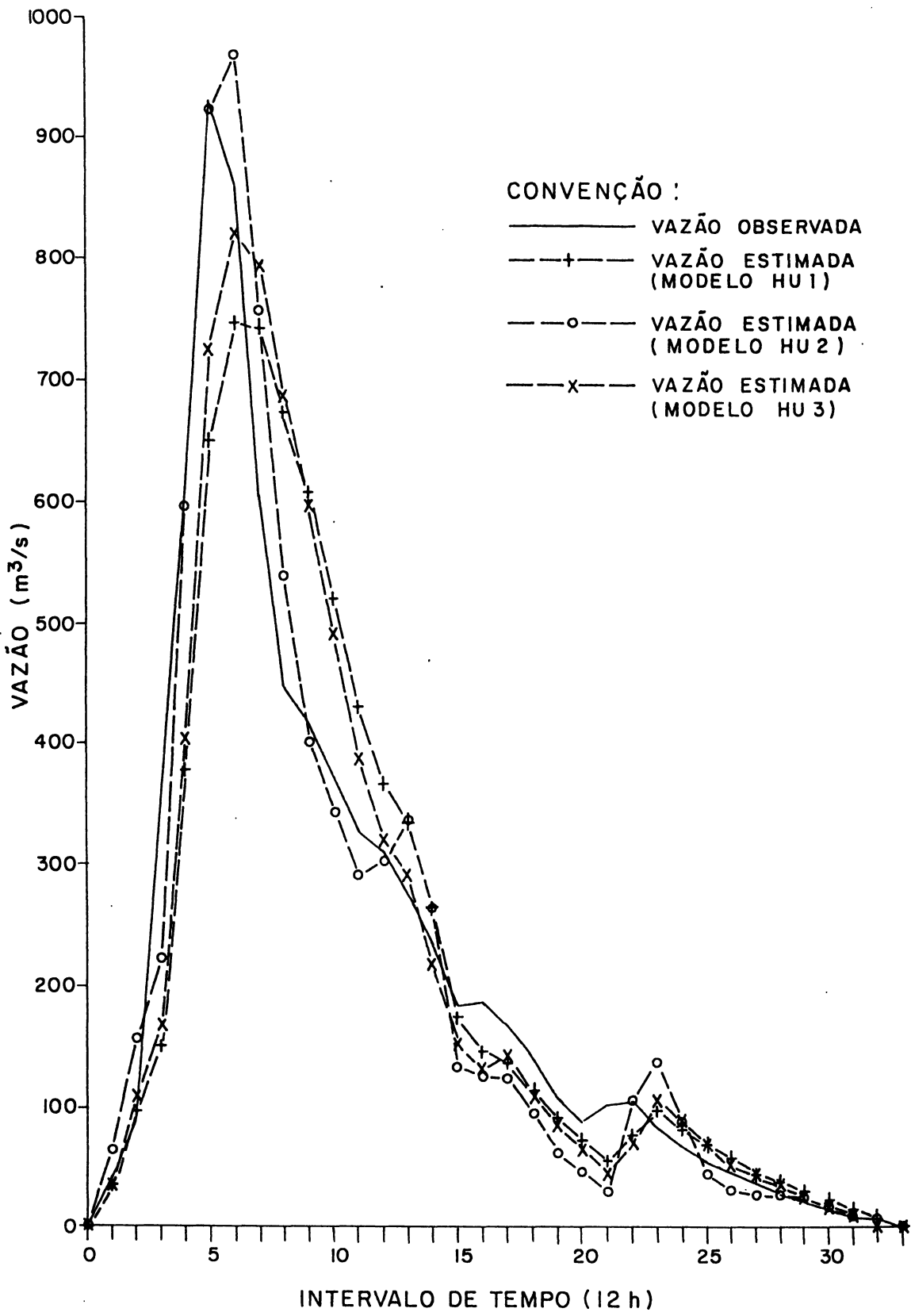


FIGURA 5.5- EVENTO 15. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO HIDROGRAMA UNITÁRIO



## 5.2 ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO

Este item apresenta os resultados da aplicação do Filtro de Kalman na estimativa e correção em tempo real dos parâmetros do modelo autoregressivo. Os dados de vazão total, apresentados no Apêndice 1, foram obtidos conforme apresentado no Capítulo 4. Apresenta-se, ainda, o procedimento adotado para a estimativa inicial dos parâmetros.

### 5.2.1 Estimativa Inicial do Parâmetros do Modelo Autoregressivo

A aplicação do Filtro de Kalman exige a estimativa inicial do estado do sistema. Na presente dissertação, os eventos de números 1 a 10 foram utilizados para a identificação da ordem e para a obtenção da aproximação inicial dos parâmetros do modelo autoregressivo

A identificação da ordem e o cálculo dos parâmetros do modelo autoregressivo seguiu o exposto em BOX e JENKINS (1976), indicando um modelo autoregressivo de ordem 2, com os parâmetros conforme apresentados a seguir.

$$q_t = 0,844q_{t-1} - 0,308q_{t-2} + 31,598$$

A partir da estimativa inicial do modelo autoregressivo, representada pela Equação 5.1, e dos valores de vazão total, apresentados no Apêndice 1, fez-se a previsão dos valores de vazão para os eventos de números 11 a 15. Considerando-se os valores de vazão observados e estimados através da aproximação inicial do modelo autoregressivo, obteve-se a raiz do erro quadrático médio (REQM) de 94,51 m<sup>3</sup>/s.

Considerou-se os valores  $\phi_1 = 0,844$  e  $\phi_2 = -0,308$ , apresentados na Equação 5.1, como sendo a aproximação inicial dos parâmetros do modelo autoregressivo a serem atualizados pelo método do Filtro de Kalman.

A vazão média foi calculada com os dados dos eventos de números 1 a 10 e mantida constante na aplicação do Filtro de Kalman, já que na previsão com a aproximação inicial sem atualização dos parâmetros, Equação 5.1, não se corrigiu a média das vazões. Justifica-se tal procedimento, procurando-se não favorecer o desempenho do modelo com correção dos parâmetros pelo Filtro de Kalman.

Verifica-se que, quando considerados os eventos de números 11 a 15, principalmente o evento 15, existe uma elevação no valor da média das vazões. A adoção da correção das médias a cada intervalo de tempo não acarretaria dificuldades do ponto de vista de formulação e implementação computacional.

Na seqüência aplicou-se o Filtro de Kalman para correção dos parâmetros em tempo real, procurando-se verificar se o mesmo

diminuía a raiz do erro quadrático médio (REQM) obtida a partir da aproximação inicial, expressa pela Equação 5.1.

#### 5.2.2 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e sem Restrições

O procedimento adotado foi o mesmo apresentado no item 5.1.2, onde considerou-se que os ruídos  $w$  e  $v$  constituem série de ruídos brancos representados pelo seu valor médio igual a zero e que as matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  são constantes no tempo. A matriz identidade foi a aproximação inicial adotada para a matriz de covariância dos erros de estimativa  $P$ .

O primeiro passo foi definir a relação  $Q/R$  que produzisse a menor raiz do erro quadrático médio (REQM). Para tanto, considerou-se  $R = 0,01$  e para várias relações de  $Q/R$ , aplicou-se o Filtro de Kalman na correção dos parâmetros do modelo autoregressivo e calculou-se a raiz do erro quadrático médio (REQM).

A Tabela 5.8 apresenta o valor final dos parâmetros do modelo autoregressivo e a REQM para  $R = 0,01$  e várias relações de  $Q/R$ . Analisando-se a Tabela 5.8, nota-se que a menor REQM foi obtida pela relação  $Q/R = 0$ , o que implica em considerar desprezíveis os erros de modelagem representados pela matriz  $Q$ .

TABELA 5.8- ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA R= 0,01. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.

Q/R	0	0,01	0,1	1	10	100
$\phi_1$	1,367	1,792	1,718	1,625	1,679	1,705
$\phi_2$	-0,496	-0,814	-0,605	-0,505	-0,488	-0,484
REQM (m³/s)	64,39	220,98	403,56	466,96	471,03	470,18

A partir da definição da melhor relação Q/R, pesquisou-se o valor de R que produzisse a menor REQM. Para tanto, variou-se o valor de R mantendo-se constante a relação Q/R = 0. A Tabela 5.9 apresenta o valor final dos parâmetros do modelo e o erro quadrático médio para vários valores de R e relação Q/R = 0.

TABELA 5.9- ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO PARA Q/R = 0. FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E SEM RESTRIÇÕES.

R	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
$\phi_1$	1,367	1,367	1,367	1,367	1,367	1,366	1,357
$\phi_2$	-0,496	-0,496	-0,496	-0,496	-0,496	-0,495	-0,486
REQM (m³/s)	64,39	64,39	64,39	64,39	64,39	64,41	64,56

Analisando-se a Tabela 5.9, nota-se que o erro não se alterou significativamente com a variação do valor de R.

Comparando-se os valores de REQM apresentados nas Tabelas 5.8 e 5.9, obtidos pelo modelo autoregressivo com correção dos parâmetros pelo Filtro de Kalman, verifica-se que, para a relação Q/R = 0, o valor de REQM foi menor do que o obtido pela aproximação

inicial, Equação 5.1, onde obteve-se uma REQM de 94,51 m<sup>3</sup>/s, conforme apresentado em 5.2.1.

Contudo, para relações de Q/R diferentes de zero, os valores de REQM, obtidos pelo modelo autoregressivo com correção dos parâmetros pelo Filtro de Kalman, foram maiores do que o obtido pela aproximação inicial, Equação 5.1, apresentando inclusive valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  não obedecendo os limites apresentados em BOX e JENKINS (1976), o que sugeriu a adoção de restrições, conforme apresentado no item 3.6.1.

#### 5.2.3 Algoritmo do Filtro de Kalman sem Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições

Este item apresenta os resultados obtidos na utilização do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância, apresentado no Quadro 3.1, a partir da adoção de restrições nos valores dos parâmetros do modelo autoregressivo, conforme descrito no item 3.6.1.

Inicialmente, como no item 5.2.2, teve-se por objetivo determinar a relação Q/R que produzia a melhor aproximação entre as vazões observadas e estimadas através do Filtro de Kalman. Novamente, adotou-se  $R = 0,01$  e para várias relações de Q/R, aplicou-se o Filtro de Kalman na correção dos parâmetros do modelo e calculou-se a REQM, considerando-se os eventos de números 11 a 15.



A Tabela 5.10 apresenta o valor final dos parâmetros do modelo autoregressivo e a raiz do erro quadrático médio (REQM) fixando-se  $R = 0,01$  e adotando-se várias relações  $Q/R$ . Novamente, o melhor resultado foi obtido para a relação  $Q/R = 0$ .

TABELA 5.10- ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA  $R=0,01$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

Q/R	0	0,01	0,1	1	10	100
$\phi_1$	1,364	1,482	1,629	1,735	1,752	1,754
$\phi_2$	-0,492	-0,716	-0,630	-0,736	-0,753	-0,755
REQM (m <sup>3</sup> /s)	64,27	88,97	87,95	86,36	86,22	86,20

Comparando-se os valores de REQM apresentados nas Tabelas 5.8 e 5.10, verifica-se que a adoção das restrições para os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  reduziu os valores de REQM, comprovando a eficiência do procedimento proposto. Verifica-se, também, que para  $Q/R = 0$ , a redução não foi muito significativa, justificada pelo fato de que, na maioria dos intervalos de tempo, os parâmetros estimados respeitavam as restrições impostas.

A partir da definição da melhor relação  $Q/R$ , pesquisou-se o valor de  $R$  que conduzisse à menor REQM. Para tanto, variou-se o valor de  $R$  mantendo-se constante a relação  $Q/R = 0$  que havia produzido a menor REQM. A Tabela 5.11 apresenta o valor final dos parâmetros do modelo autoregressivo e a raiz do erro quadrático médio (REQM) para vários valores de  $R$  e relação  $Q/R = 0$ , considerando-se a utilização das restrições citadas anteriormente.

TABELA 5.11- ESTIMATIVA FINAL DOS PARÂMETROS DO MODELO AUTOREGRESSIVO E RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (REQM) PARA  $Q/R = 0$ . FILTRO DE KALMAN SEM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

R	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
$\phi_1$	1,364	1,364	1,364	1,364	1,364	1,364	1,357
$\phi_2$	-0,492	-0,492	-0,492	-0,492	-0,492	-0,492	-0,486
REQM (m3/s)	64,27	64,27	64,27	64,27	64,27	64,34	64,56

Novamente, os valores de REQM para a relação  $Q/R = 0$  não se mostraram muito sensíveis às variações de R.

Comparando-se as Tabelas 5.9 e 5.11, verifica-se que a adoção das restrições aos parâmetros do modelo não alterou significativamente o valor da REQM. Como mencionado anteriormente, justifica-se pelo fato de que para a relação  $Q/R = 0$ , os parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em geral respeitavam às restrições impostas.

Os valores estimados pela aproximação inicial, Equação 5.1, sem a aplicação do método do Filtro de Kalman que permite a atualização dos parâmetros em tempo real, produziu uma REQM de 94,51 m³/s, conforme apresentado no item 5.2.1. Com a adoção do Filtro de Kalman e das restrições quanto aos valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , a REQM foi reduzida para 64,27 m³/s, mostrando um ganho na aproximação entre os valores de vazão observados e estimados.

A seguir apresenta-se a utilização do algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ , apresentado no Quadro 3.2, e com utilização das restrições

quanto aos valores dos parâmetros do modelo autoregressivo, conforme descrito no item 3.6.1.

#### 5.2.4 Algoritmo do Filtro de Kalman com Correção dos Ruídos e das Matrizes de Covariância e com Restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman, resumido no Quadro 3.2, estabelece a correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  em tempo real, portanto, mais genérico do que o algoritmo apresentado no Quadro 3.1. Adicionalmente, introduziu-se o mesmo procedimento apresentado no item 3.6.1, considerando-se restrições impostas aos valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

Os valores de vazão total e a aproximação inicial dos parâmetros  $\phi_1$  e  $\phi_2$  foram os mesmos utilizados anteriormente. Novamente, a análise dos resultados foi feita pelo cálculo da raiz do erro quadrático médio (REQM), comparando-se as vazões observadas e estimadas pela aplicação do Filtro de Kalman, referentes aos eventos de números 11 a 15.

A aplicação do Filtro de Kalman com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  produziu, como valor final dos parâmetros do modelo autoregressivo,  $\phi_1 = 1,989$  e  $\phi_2 = -0,990$  e uma REQM de 49,83 m<sup>3</sup>/s, inferior, portanto, ao algoritmo sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância que apresentou uma REQM de 64,27 m<sup>3</sup>/s.

O valor da raiz do erro quadrático médio (REQM) mostra que a aplicação do Filtro de Kalman, com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e as restrições impostas aos parâmetros do modelo, reduziu a REQM de 94,51 m<sup>3</sup>/s, considerando-se as estimativas efetuadas pela aproximação inicial, Equação 5.1, para 49,83 m<sup>3</sup>/s, mostrando um ganho na aproximação entre as vazões observadas e estimadas.

A Tabela 5.12 apresenta ao final de cada evento, os valores dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ . Os valores do ruído  $v$  convergiram para um valor aceitável quando comparados à ordem de grandeza das vazões observadas enquanto que os valores do ruído  $w$  convergiram para um valor que não pode ser considerado desprezível em comparação à ordem de grandeza dos parâmetros do modelo autoregressivo.

Analisando-se a Tabela 5.12, verifica-se que a relação  $Q/R$  é próxima de zero, confirmando os resultados apresentados nas Tabelas 5.8 e 5.10, que indicaram os menores valores de REQM para a relação  $Q/R = 0$ . Verifica-se, também, que a matriz  $R$  convergiu para valores elevados, tendo-se como justificativa os resultados apresentados nas Tabelas 5.9 e 5.11 onde nota-se que os valores da REQM não se mostraram muito sensíveis às variações de  $R$ .

TABELA 5.12 - VALORES DOS RUÍDOS  $w$  E  $v$  E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA  $Q$  E  $R$  APÓS CADA EVENTO. FILTRO DE KALMAN COM CORREÇÃO DOS RUÍDOS E DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA E COM RESTRIÇÕES.

Evento	$w$ (x 1 E-1)	$Q$	$v$	$R$ (x 1 E 4)
1	-1,2	4,4	12,0	-0,3
2	1,8	3,8	14,0	-2,1
3	3,7	3,6	7,9	-6,0
4	3,9	2,4	7,4	-6,0
5	3,9	2,4	4,4	-4,6
6	3,9	1,9	3,1	-3,8
7	3,8	1,8	2,4	-4,1
8	3,8	1,5	1,2	-4,1
9	3,9	1,4	-0,5	-4,0
10	3,9	1,4	-0,7	-3,7
11	3,9	1,2	-0,8	-3,1
12	3,9	1,1	-1,1	-2,9
13	3,6	1,0	0,4	-3,0
14	3,5	0,9	0,0	-2,8
15	3,8	0,8	-1,3	-7,1

Considerando-se que a matriz  $R$  representa a matriz de covariância dos erros de observação, é lógico esperar que quanto maior a grandeza das vazões observadas maior o erro de observação. Justifica-se, portanto, o valor de  $R$  relativamente alto para o evento de número 15, conforme apresentado na Tabela 5.12, pelo fato das vazões observadas para o referido evento serem superiores às vazões observadas nos demais eventos.

#### 5.2.5 Comparação das Estimativas de Vazão pelo Modelo Autoregressivo usando o Filtro de Kalman

Os resultados obtidos na estimativa de vazões pelo modelo autoregressivo utilizando o Filtro de Kalman, até aqui apresentados, analisaram o valor da raiz do erro quadrático médio (REQM) calculado para os eventos de números 11 a 15 considerados em conjunto. Neste ítem faz-se uma apresentação e discussão dos resultados considerando-se os referidos eventos isoladamente.

A análise foi feita comparando-se as vazões observadas com as vazões estimadas por três modelos distintos, a saber:

MODELO AR1 Vazões estimadas pela aproximação inicial do modelo autoregressivo apresentada na Equação 5.1.

MODELO AR2 Vazões estimadas pelo modelo autoregressivo corrigido pelo Filtro de Kalman, Quadro 3.1, e com restrições.  
Relação  $Q/R = 0$  e  $R = 0,01$ .

MODELO AR3 Vazões estimadas pelo modelo autoregressivo corrigido pelo Filtro de Kalman, Quadro 3.2, e com restrições.

A Tabela 5.13 apresenta os valores de REQM para os eventos de números 11 a 15, considerando-se os três modelos citados.

TABELA 5.13- VALORES DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (m³/s) PARA OS EVENTOS 11 A 15 COM ESTIMATIVAS FEITAS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO

EVENTO	RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO MÉDIO (m³/s)		
	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3
11	14,93	12,93	7,82
12	20,45	17,75	13,28
13	48,15	39,92	35,68
14	42,67	39,81	46,13
15	149,81	98,10	70,36
TOTAL	94,51	64,27	49,83

Analizando-se a Tabela 5.13, verifica-se que os Modelos AR2 e AR3, que utilizam a correção dos parâmetros em tempo real pelo Filtro de Kalman, apresentaram em relação ao Modelo AR1 melhores resultados para todos os eventos, com exceção feita ao Modelo AR3 no evento 14. Na comparação entre os Modelos AR2 e AR3, verifica-se que o desempenho do Modelo AR3 foi em geral superior. As Figuras 5.6 a 5.10 apresentam os hidrogramas observado e estimados pelos três modelos.

Há que se ressaltar as limitações impostas pela adoção do modelo autoregressivo para a estimativa de vazões. A estrutura destes modelos tende a produzir atraso nas estimativas do pico do hidrograma, verificando-se, pela observação das Figuras 5.6 a 5.10, que esta característica inerente ao próprio modelo não foi alterada pela aplicação do Filtro de Kalman.

Outro aspecto limitador da qualidade dos resultados foi o intervalo de tempo adotado na utilização do modelo autoregressivo.

O intervalo de tempo de 12 horas não foi o mais adequado para a representação do ramo de ascensão do hidrograma, porém, o mesmo foi adotado em função dos dados disponíveis, como já mencionado anteriormente.

Finalmente, notadamente para o evento 15, verifica-se que o desempenho do Modelo AR1 que não utiliza a correção dos parâmetros é sensivelmente inferior aos Modelos AR2 e AR3. Esta fato justifica-se pela magnitude das vazões do evento 15 e pela adoção do valor constante para a vazão média, calculada considerando-se os eventos 1 a 10, e que foi utilizado nas estimativas de vazões referentes aos eventos 11 a 15. A correção dos parâmetros em tempo real nos Modelos AR2 e AR3 compensa a adoção do valor constante para a vazão média.



FIGURA 5.6- EVENTO 11. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO

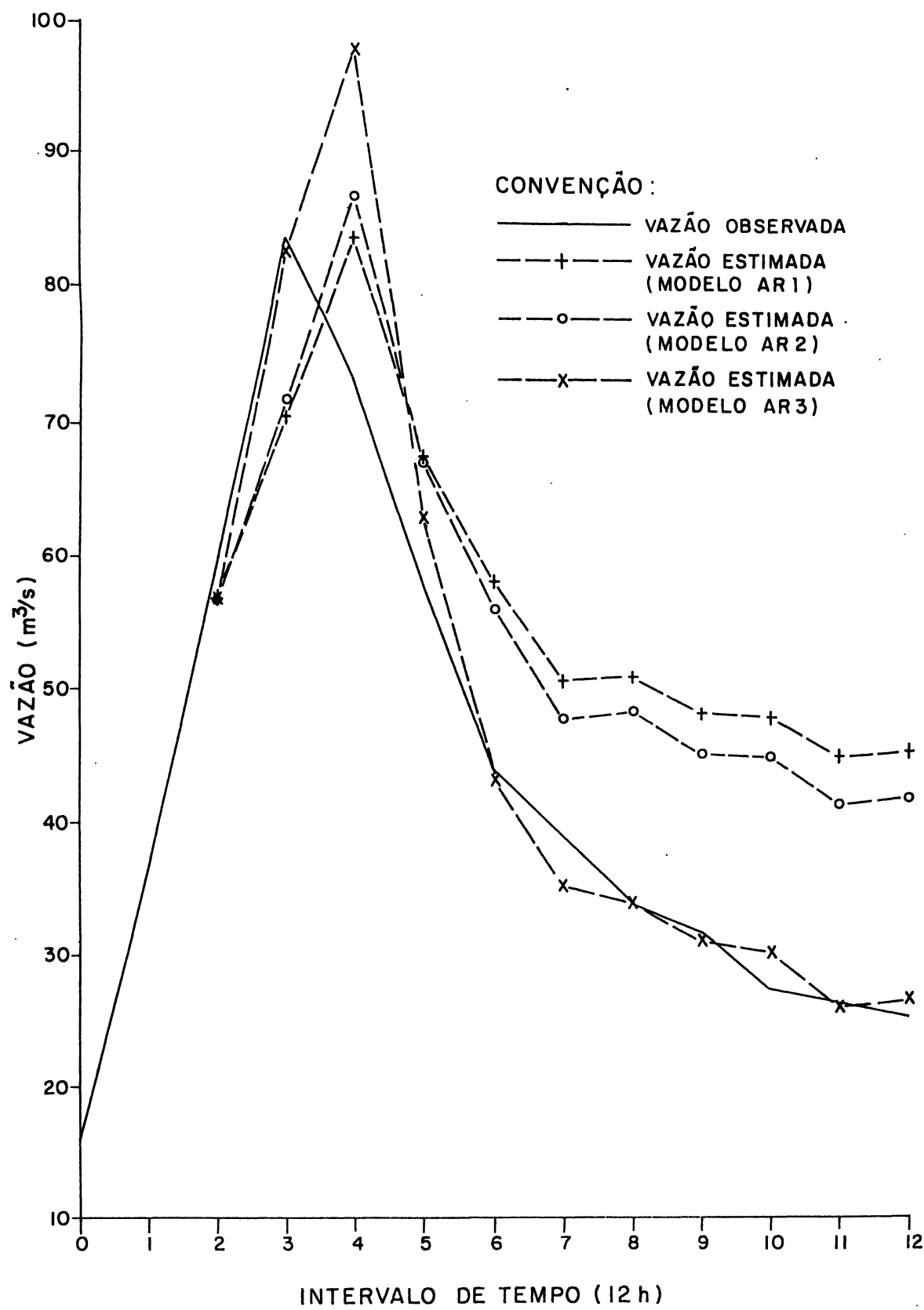


FIGURA 5.7- EVENTO 12. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO

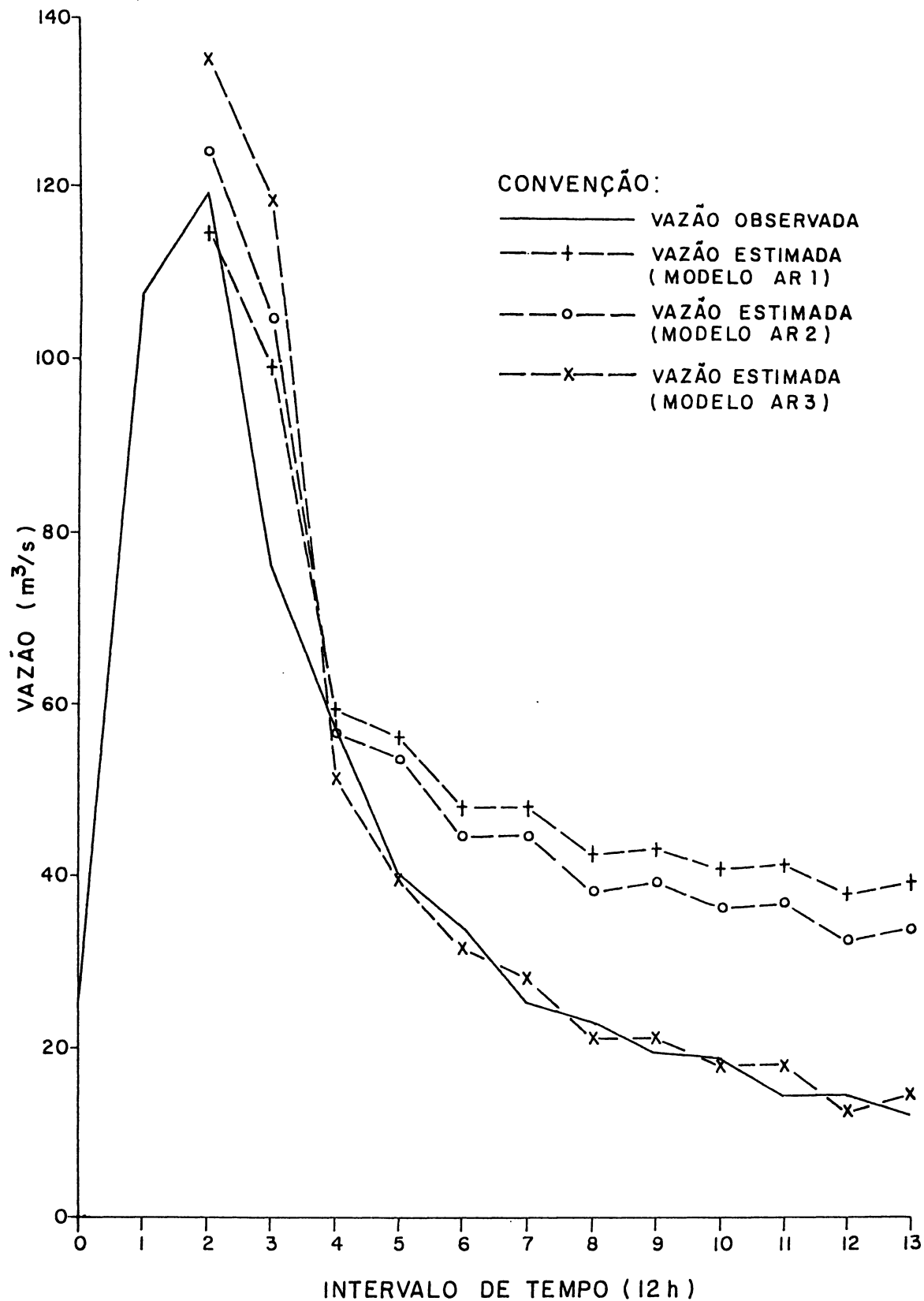


FIGURA 5.8- EVENTO 13. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO

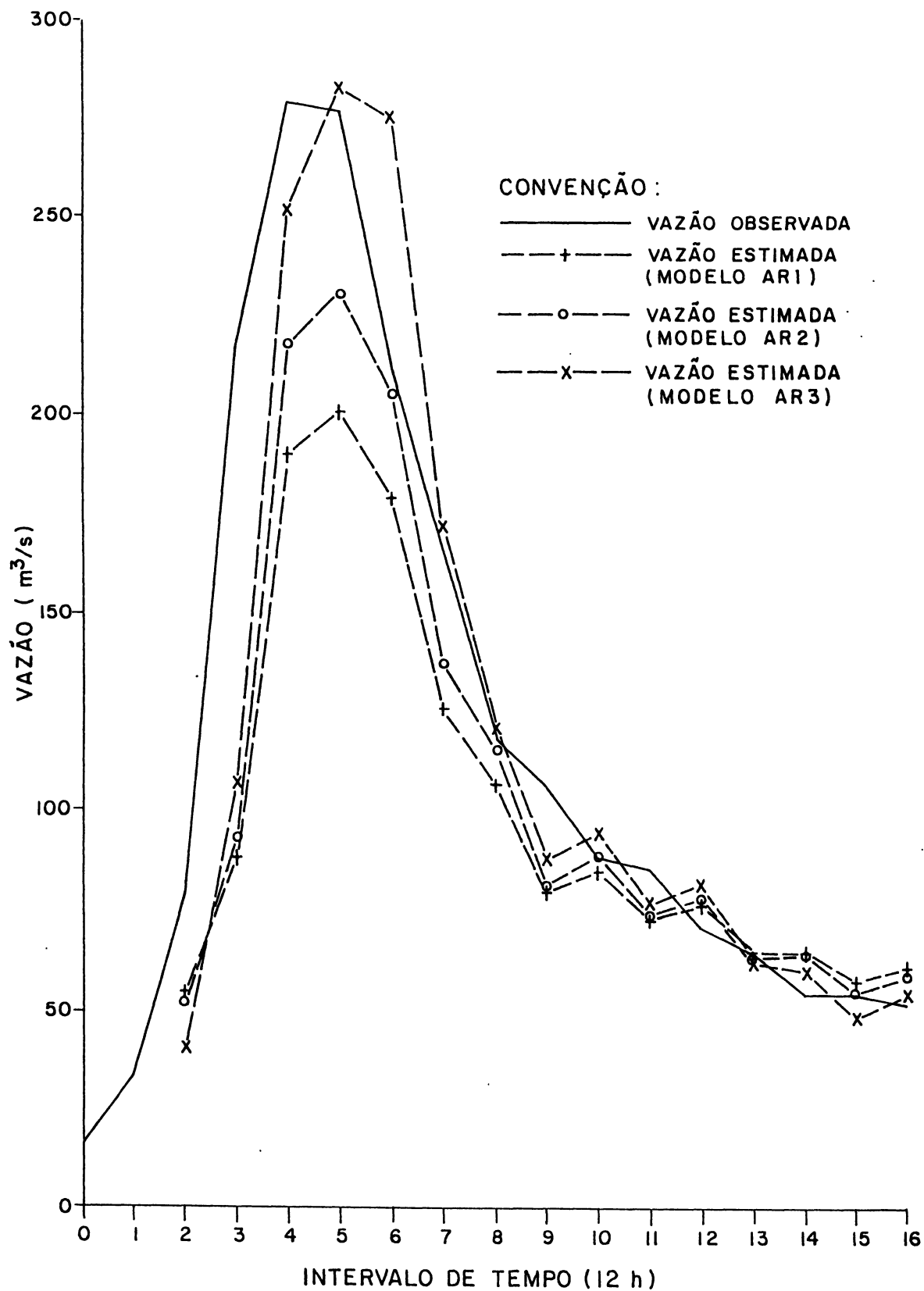


FIGURA 5.9- EVENTO 14. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO

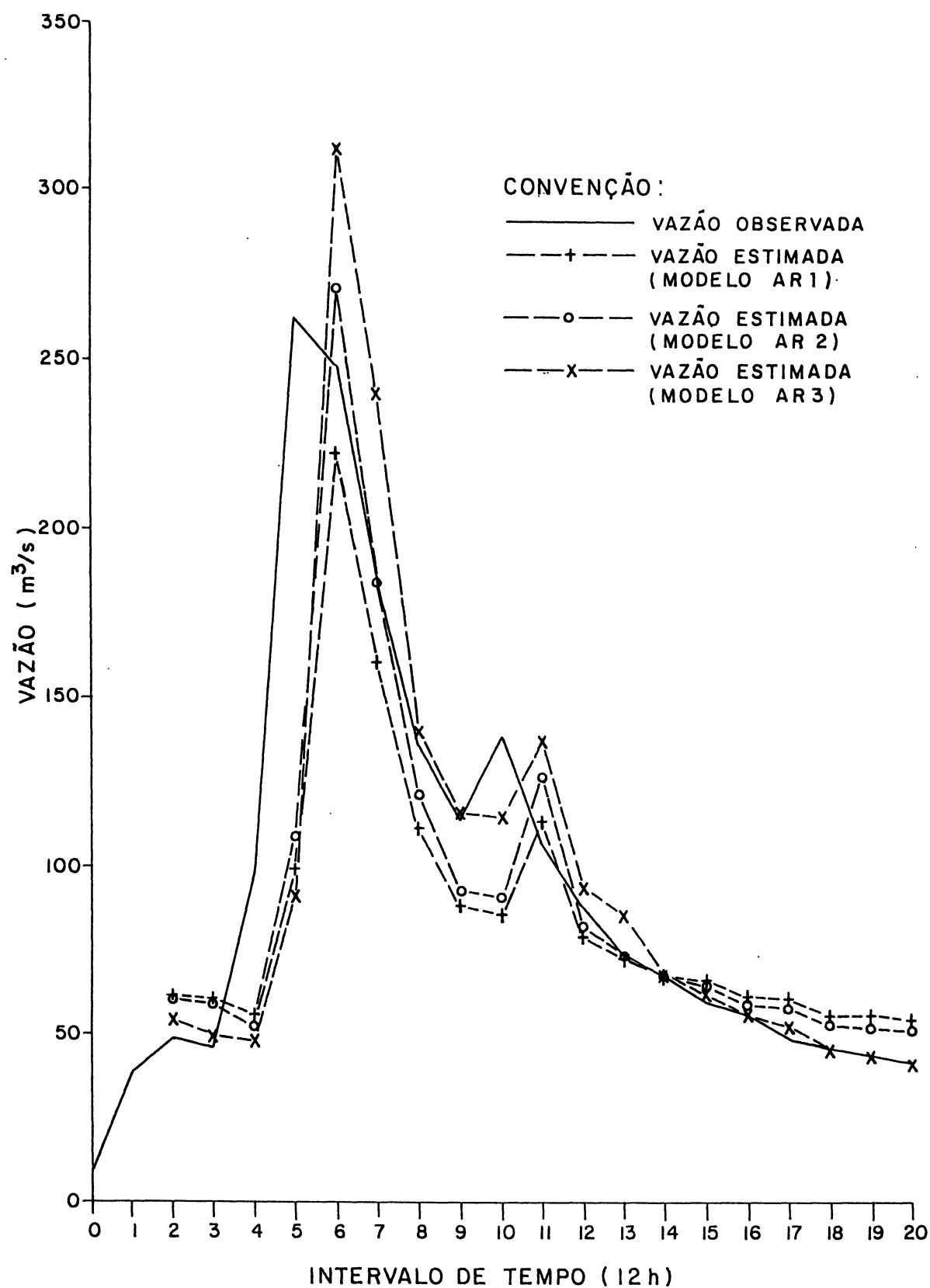
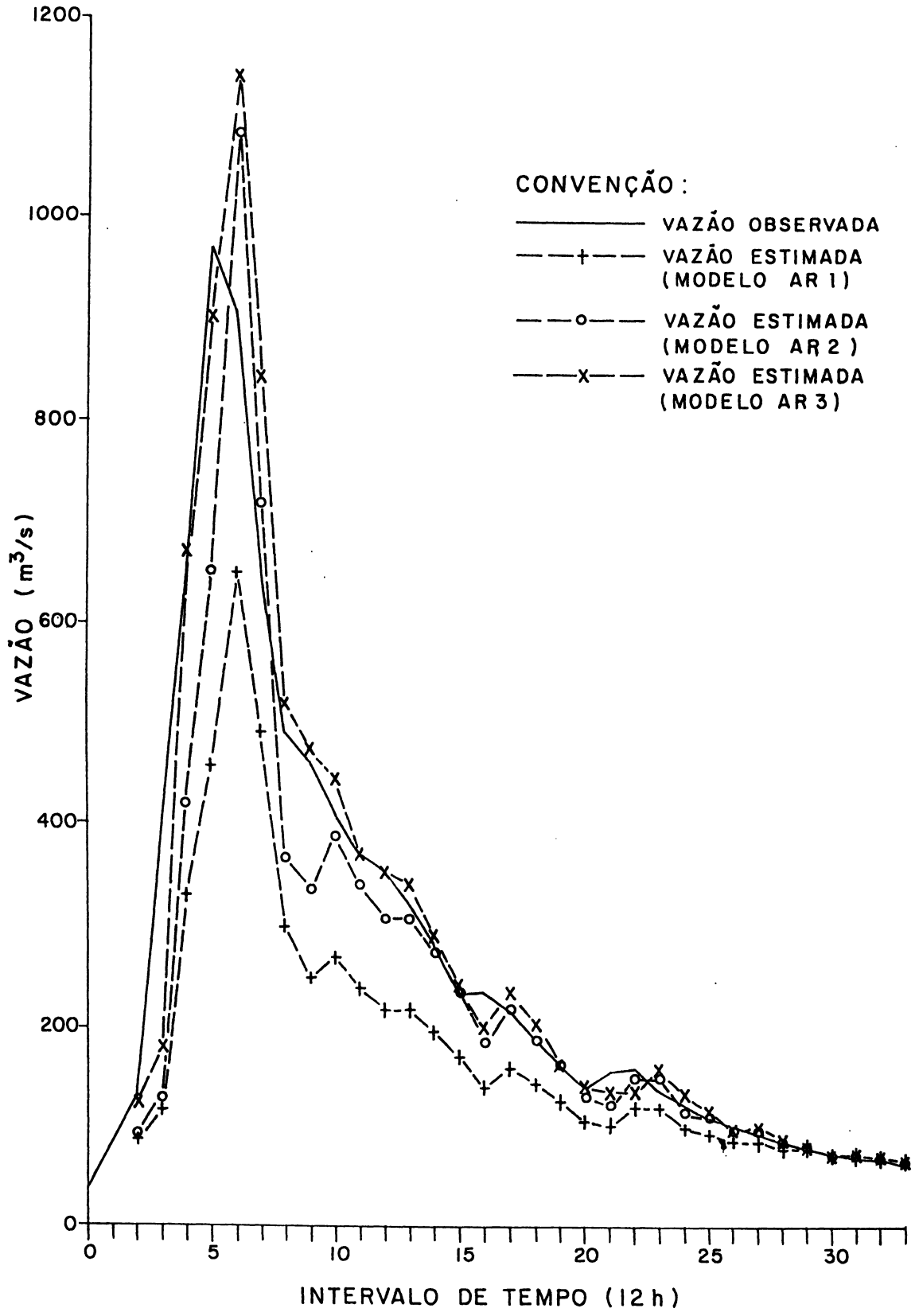


FIGURA 5.10- EVENTO 15. COMPARAÇÃO DOS HIDROGRAMAS OBSERVADO E ESTIMADOS PELO MODELO AUTOREGRESSIVO



## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O método do Filtro de Kalman foi aplicado, no contexto dessa dissertação, com o objetivo de avaliar sua utilização na obtenção de modelos de previsão de vazão, cujos parâmetros pudessem ser reavaliados à medida em que uma nova informação hidrológica fosse obtida. Na aplicação do método do Filtro de Kalman foram utilizados três algoritmos distintos, tanto na determinação das ordenadas do hidrograma unitário quanto no cálculo dos parâmetros do modelo autoregressivo, a saber:

- 1º) sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e sem restrições;
- 2º) sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restrições;
- 3º) com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restrições.

Os resultados obtidos a partir da aplicação do Filtro de Kalman na obtenção das ordenadas do hidrograma unitário, utilizando-se os dados da bacia do rio Jangada, permitiram concluir que:

- a) o algoritmo do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e sem restrições, resultou em ordenadas negativas e não conservou o

volume unitário correspondente a uma precipitação efetiva de 10 mm. Justifica-se pela variabilidade inicial das variáveis e pelo grande número de variáveis que definem o filtro.

Na presente dissertação, o exemplo de obtenção das ordenadas do hidrograma unitário para o algoritmo mais genérico do Filtro de Kalman, expresso no Quadro 3.2, apresentava, a cada intervalo de tempo, a necessidade de se atualizar um total de 136 variáveis assim distribuídas:  $x[11 \times 1]$ ,  $w[1 \times 1]$ ,  $v[1 \times 1]$ ,  $Q[1 \times 1]$ ,  $R[1 \times 1]$  e  $P[11 \times 11]$ . Considerando-se que a matriz de covariância dos erros de estimativa  $P$  é simétrica, o número de variáveis se reduz a 81. Portanto, a cada nova informação obtida são atualizadas 81 variáveis, o que mostra o grande número de variáveis envolvidas;

- b) a utilização de um período unitário inferior a 12 horas, por exemplo 6 horas, parece mais apropriado em função das dimensões da bacia, mas além de não acrescentar informação nova ao conjunto de dados, elevaria o número de variáveis a serem atualizadas a cada intervalo de tempo. No caso do algoritmo mais genérico, apresentado no Quadro 3.2, passaria de 81 para 328 variáveis, aumentando muito o número de variáveis envolvidas;

- c) a adoção das restrições de não negatividade das ordenadas do hidrograma unitário e da manutenção do volume unitário equivalente a uma precipitação efetiva de 10 mm, não melhorou o desempenho do **Filtro de Kalman**, no tocante ao algoritmo apresentado no Quadro 3.1. Porém, sugere-se a adoção das restrições com o objetivo de produzir ordenadas não negativas e de conservar o volume unitário;
- d) o algoritmo do **Filtro de Kalman** sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e sem restrições, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de 37,43 m<sup>3</sup>/s para a relação  $Q/R=0$  e  $R=10$ . Comparando-se com a REQM obtida pela estimativa inicial do hidrograma unitário que foi de 68,45 m<sup>3</sup>/s, verifica-se que mesmo sem as restrições, a aplicação do **Filtro de Kalman** melhorou significativamente a estimativa das vazões;
- e) o algoritmo do **Filtro de Kalman** sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restrições, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de 38,99 m<sup>3</sup>/s para a relação  $Q/R=0$  e  $R=10$ . Comparando-se com a REQM obtida pela estimativa inicial do hidrograma unitário que foi de 68,45 m<sup>3</sup>/s, verifica-se que com as restrições impostas, a aplicação do **Filtro de Kalman** melhorou significativamente a estimativa das vazões;



f) o algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restrições, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de  $62,29 \text{ m}^3/\text{s}$ . Analisando-se o valor de  $REQM$ , verifica-se que a adoção do algoritmo mais genérico, apresentado no Quadro 3.2, não melhorou o desempenho do filtro, em relação ao algoritmo apresentado no Quadro 3.1;

Os ruídos  $w$  e  $v$  convergiram para valores aceitáveis em comparação, respectivamente, à ordem de grandeza das ordenadas do hidrograma unitário e das vazões observadas. A matriz de covariância dos erros de modelagem  $Q$  convergiu para valores desprezíveis em relação à matriz de covariância dos erros de observação  $R$ . A matriz de covariância  $R$  convergiu para valores entre 1000 e 1500. O valor relativamente alto de  $R$  ao final do evento 15, justifica-se pelo fato de que o referido evento apresenta vazões muito superiores aos demais.

Resumindo, para a obtenção e atualização das ordenadas do hidrograma unitário, o algoritmo do Filtro de Kalman permitiu a construção de um modelo de previsão de vazão cujos parâmetros são corrigidos em tempo real. A adoção das restrições de não negatividade das ordenadas e manutenção do volume unitário é recomendável para garantir a convergência das ordenadas em valores fisicamente coerentes dentro dos conceitos básicos relativos à teoria do hidrograma unitário.

Os resultados obtidos a partir da aplicação do Filtro de Kalman na atualização das ordenadas do modelo autoregressivo de ordem 2, utilizando-se os dados da bacia do rio Jangada, permitiram concluir que:

- a) o algoritmo do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e sem restrições, resultou em valores para os parâmetros do modelo autoregressivo que não satisfazem os limites apresentados em BOX e JENKINS (1976) para modelos de ordem 2, com exceção dos parâmetros produzidos pela relação  $Q/R = 0$ .

Na presente dissertação, o exemplo de atualização dos parâmetros do modelo autoregressivo de ordem 2 para o algoritmo mais genérico do Filtro de Kalman, expresso no Quadro 3.2, apresentava, a cada intervalo de tempo, a necessidade de se atualizar um total de 10 variáveis assim distribuídas:  $x[2 \times 1]$ ,  $w[1 \times 1]$ ,  $v[1 \times 1]$ ,  $Q[1 \times 1]$ ,  $R[1 \times 1]$  e  $P[2 \times 2]$ . Considerando-se que a matriz de covariância dos erros de estimativa  $P$  é simétrica, o número de variáveis se reduz a 9. Portanto, a cada nova informação obtida são atualizadas 9 variáveis, número sensivelmente inferior ao número de variáveis utilizadas na obtenção das ordenadas do hidrograma unitário;

- b) a utilização de um período unitário inferior a 12 horas, parece mais apropriado em função das dimensões da bacia. Não foi possível a adoção de um intervalo de tempo

menor devido à frequência de observação da Estação Fluviométrica Jangada do Sul (2 leituras diárias). Uma alternativa poderia ser calcular por interpolação, vazões intermediárias entre as vazões observadas. Contudo a utilização de tal procedimento alteraria a ordem do modelo autoregressivo em virtude da dependência das vazões interpoladas em relação às vazões observadas;

c) a adoção das restrições aos parâmetros do modelo autoregressivo de ordem 2, como apresentado em BOX e JENKINS (1976), melhorou de modo geral o desempenho do Filtro de Kalman;

d) o algoritmo do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e sem restrições, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de  $64,39 \text{ m}^3/\text{s}$  para a relação  $Q/R = 0$ , não se apresentando muito sensível às variações de  $R$ . Comparando-se com a REQM obtida pela estimativa inicial do modelo autoregressivo que foi de  $94,51 \text{ m}^3/\text{s}$ , verifica-se que mesmo sem as restrições impostas, a aplicação do Filtro de Kalman melhorou a estimativa das vazões. Justifica-se pelo fato de que para a relação  $Q/R = 0$ , os parâmetros do modelo autoregressivo obedeceram aos limites apresentados em BOX e JENKINS (1976);

e) o algoritmo do Filtro de Kalman sem correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restri-

ções, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de  $64,27 \text{ m}^3/\text{s}$  para a relação  $Q/R = 0$  não se mostrando muito sensível às variações de  $R$ . Comparando-se com a REQM obtida pela estimativa inicial do modelo autoregressivo que foi de  $94,51 \text{ m}^3/\text{s}$ , verifica-se, novamente, que a aplicação do Filtro de Kalman melhorou a estimativa das vazões. Comparando-se com os resultados obtidos pelo algoritmo sem restrições, verifica-se que a adoção das restrições não melhora significativamente a estimativa das vazões, somente, para a relação  $Q/R=0$ , relação para a qual os parâmetros do modelo respeitam os limites apresentados em BOX e JENKINS (1976);

f) o algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$  e com restrições, apresentou como menor raiz do erro quadrático médio, o valor de  $49,83 \text{ m}^3/\text{s}$ . Analisando-se o valor da REQM, verifica-se que a adoção do algoritmo mais genérico, apresentado no Quadro 3.2, melhorou o desempenho do filtro em relação aos algoritmos anteriores.

O ruído  $w$  convergiu para valores que não podem ser considerados desprezíveis em relação à ordem de grandeza dos parâmetros do modelo autoregressivo, enquanto que o ruído  $v$  convergiu para valores aceitáveis em comparação à ordem de grandeza das vazões observadas. A matriz de covariância dos erros de modelagem  $Q$  convergiu para valores muito pequenos em relação à matriz de covariância

dos erros de observação  $R$ .

A matriz de covariância  $R$  convergiu para valores em módulo entre 20000 e 40000, aproximadamente. Destaca-se que nos algoritmos anteriores, a REQM não havia se mostrado muito sensível aos valores de  $R$ , podendo, inclusive justificar a convergência para valores de  $R$  negativos. O valor relativamente alto de  $R$  ao final do evento 15 é justificado pelo fato de que o referido evento apresenta vazões muito superiores aos demais.

Resumindo, para a obtenção e atualização dos parâmetros do modelo autoregressivo de ordem 2, o algoritmo do Filtro de Kalman permitiu a construção de um modelo de previsão de vazão cujos parâmetros são corrigidos em tempo real. A adoção das restrições é recomendável para a convergência dos parâmetros dentro dos limites apresentados em BOX e JENKINS (1976), com exceção das estimativas obtidas para a relação  $Q/R = 0$ , na qual os limites são respeitados. A aplicação do Filtro de Kalman teve como resultado a diminuição da raiz do erro quadrático médio em relação às estimativas feitas pela aproximação inicial dos parâmetros do modelo autoregressivo de ordem 2.

Conclui-se, portanto, que a adoção do Filtro de Kalman permite a construção de modelos cujos parâmetros podem ser corrigidos em tempo real, principalmente, devido a sua flexibilidade na representação de modelos hidrológicos, através do conceito de modelos dinâmicos de estado (**State-Space Models**).

Salienta-se o fato de que teoricamente, em sua definição, o **Filtro de Kalman** não estabelece nenhuma relação com a realidade física do sistema a ser representado. Recomenda-se, para se ter uma coerência física, estabelecer restrições aos valores dos parâmetros que compõem o modelo hidrológico adotado e que são estimados e atualizados pelo filtro, com a finalidade de conservar as características básicas do modelo hidrológico e garantir a convergência do modelo construído em conjunto com o filtro.

Como sugestões para estudos posteriores, pode-se citar:

a) a definição de outros esquemas de restrições aos valores dos parâmetros dos modelos hidrológicos utilizados, com o objetivo de verificar se o desempenho do **Filtro de Kalman** pode ser melhorado. Os esquemas de restrições utilizados nesta dissertação foram obtidos, considerando-se conceitos básicos referentes à teoria do hidrograma unitário e do modelo autoregressivo de ordem 2. Poder-se-ia estabelecer restrições, por exemplo, quanto ao valor numérico dos ruídos  $w$  e  $v$  e das matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ ;

b) o estudo mais aprofundado da influência das estimativas iniciais do sistema e das variáveis que compõem o **Filtro de Kalman** sobre a aproximação entre as grandezas observadas e estimadas;

- c) a adoção de séries mais extensas de dados com o objetivo de minimizar a influência das estimativas iniciais sobre o desempenho do Filtro de Kalman, principalmente na aplicação do algoritmo mais genérico, apresentado no Quadro 3.2, onde um maior número de variáveis são estimadas a cada intervalo de tempo;
- d) a aplicação do Filtro de Kalman a outros modelos matemáticos utilizados em hidrologia, com o objetivo de se atingir um maior grau de conhecimento a respeito do filtro, considerando a sua capacidade de permitir a construção de modelos com atualização de parâmetros em tempo real.

**Apêndice 1**  
**Dados Hidrológicos Utilizados**



i  $\Delta t=12h$	Evento 01			Evento 02		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	13,57	0,0	15,35	20,35	0,00	-
1	41,43	26,89		22,11	1,22	34,16
2	85,03	69,52		94,39	72,95	-
3	107,39	90,91		223,29	201,31	-
4	85,03	67,59		161,79	139,26	-
5	56,87	38,46		119,29	96,22	-
6	47,70	28,32		83,55	59,93	-
7	38,95	18,60		70,45	46,29	5,16
8	35,23	13,91		69,08	44,38	
9	31,79	9,50		99,19	73,94	
10	29,59	6,34		86,51	60,72	
11	27,39	3,17		71,82	45,48	
12	25,19	0,00		58,18	31,10	
13				55,56	28,14	
14				47,70	19,73	
15				43,91	15,40	
16				38,95	9,89	
17				36,47	6,87	
18				32,89	2,74	
19				30,69	0,00	

i  $\Delta t=12h$	Evento 03			Evento 04		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	23,00	0,00	8,40	20,35	0,00	2,09
1	46,39	22,76	6,60	27,39	5,53	4,19
2	207,79	183,53	15,00	173,19	149,83	18,59
3	194,59	169,71		165,59	140,72	
4	152,59	127,08		117,59	91,22	
5	104,00	77,86		88,00	60,12	
6	69,08	42,31		67,71	38,33	
7	59,50	32,10		59,50	28,61	
8	51,63	23,61		51,63	19,23	
9	47,70	19,05		49,01	15,11	
10	42,67	13,39		51,63	16,22	
11	38,95	9,04		56,87	19,96	
12	36,47	5,94		51,63	13,21	
13	34,00	2,84		46,39	6,47	
14	31,79	0,00		41,43	0,00	

i  $\Delta t=12h$	Evento 05			Evento 06		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	16,63	0,00	7,84	11,09	0,00	5,34
1	70,45	53,55	13,04	47,70	35,45	5,44
2	177,00	160,03		64,97	51,56	--
3	146,59	129,56		77,63	63,06	15,54
4	76,15	59,05		135,39	119,66	
5	56,87	39,70		133,59	116,70	
6	38,95	21,71		94,39	76,34	
7	34,00	16,70		73,19	53,98	
8	27,39	10,02		58,18	37,80	
9	25,19	7,75		49,01	27,47	
10	21,23	3,72		46,39	23,69	
11	21,23	3,66		38,95	15,09	
12	19,47	1,83		35,23	10,21	
13	17,71	0,00		32,89	6,71	
14				29,59	2,25	
15				28,50	0,00	

i  $\Delta t=12h$	Evento 07			Evento 08		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	21,23	0,00	45,62	14,19	0,00	21,63
1	130,00	106,45		135,39	120,54	
2	312,00	286,14		154,19	138,68	
3	285,03	256,85		133,59	117,42	
4	225,59	195,10		63,60	46,77	
5	126,39	93,58		51,63	34,14	
6	96,00	60,88		37,71	19,56	
7	77,63	40,19		36,47	17,66	
8	70,45	30,70		31,79	12,32	
9	62,23	20,16		29,59	9,46	
10	58,18	13,80		26,29	5,50	
11	51,63	4,93		25,19	3,74	
12	49,01	0,00		22,11	0,00	

i  $\Delta t=12h$	Evento 09			Evento 10		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	14,19	0,00	18,85	10,47	0,00	19,85
1	221,00	205,88	6,95	52,94	41,43	
2	165,59	149,54		154,19	141,63	
3	99,19	82,21		124,59	110,99	
4	55,56	37,65		76,15	61,50	
5	43,91	25,07		58,18	42,49	
6	37,71	17,94		46,39	29,65	
7	43,91	23,20		38,95	21,17	
8	52,94	31,30		32,89	14,07	
9	47,70	25,13		29,59	9,72	
10	38,95	15,45		27,39	6,48	
11	34,00	9,57		25,19	3,23	
12	29,59	4,23		23,00	0,00	
13	26,29	0,00				

i  $\Delta t=12h$	Evento 11			Evento 12		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	15,95	0,00	11,81	25,19	0,00	12,03
1	36,47	19,75		107,39	83,24	1,43
2	59,50	42,01		119,29	96,17	
3	83,55	65,29		76,15	54,07	
4	73,19	54,16		56,87	35,83	
5	58,18	38,38		40,19	20,18	
6	43,91	23,34		34,00	15,03	
7	38,95	17,61		25,19	7,26	
8	34,00	11,89		23,00	6,11	
9	31,79	8,91		19,47	3,61	
10	27,39	3,74		18,59	3,77	
11	26,29	1,87		14,19	0,41	
12	25,19	0,00		14,19	1,44	
13				11,71	0,00	

i	Evento 13			Evento 14		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Precip. Efetiva (mm)
0	15,95	0,00	4,55	9,23	0,00	13,19
1	32,89	14,71	--	38,95	28,11	--
2	79,11	58,70	31,15	49,01	36,56	4,39
3	216,59	193,95	--	46,39	32,33	26,39
4	279,50	254,63	21,75	97,59	81,92	14,39
5	277,00	249,90		262,39	245,11	--
6	212,19	182,86		248,59	229,70	--
7	165,59	134,03		185,79	165,29	--
8	117,59	83,80		135,39	113,28	0,39
9	105,69	69,67		114,19	90,47	
10	88,00	49,75		139,00	113,67	
11	85,03	44,55		107,39	80,45	
12	70,45	27,74		88,00	59,45	
13	64,97	20,03		74,67	44,51	
14	54,25	7,08		67,71	35,94	
15	54,25	4,85		59,50	26,12	
16	51,63	0,00		55,56	20,57	
17				49,01	12,41	
18				46,39	8,18	
19				43,91	4,09	
20				41,43	0,00	

i Δt=12h	Evento 15		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Prec. Efetiva (mm)
0	36,47	0,00	16,88
1	79,11	41,94	13,88
2	128,19	90,32	15,88
3	399,50	360,94	102,48
4	650,00	610,74	41,48
5	970,39	930,43	36,08
6	900,19	859,53	--
7	643,59	602,23	11,28
8	490,00	447,95	1,28
9	459,50	416,75	3,68
10	411,29	367,84	--
11	370,00	325,85	16,88
12	354,09	309,25	11,88
13	322,09	276,55	--
14	282,00	235,76	--
15	230,19	183,25	11,28
16	234,79	187,15	--
17	216,59	168,26	--
18	190,19	141,16	--
19	158,00	108,27	--
20	139,00	88,57	--
21	154,19	103,06	18,48
22	158,00	106,18	
23	135,39	82,87	
24	121,00	67,78	
25	107,39	53,47	
26	100,79	46,18	
27	91,19	35,88	
28	83,55	27,54	
29	76,15	19,44	
30	73,19	15,78	
31	67,71	9,61	
32	64,97	6,17	
33	59,50	0,00	



**Apêndice 2**

**Estimativas Obtidas com o Hidrograma Unitário**

i  Δt=12h	Evento 11			Evento 12		
	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)
	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	23,93	44,73	24,37	24,37	45,08	24,80
2	47,84	72,80	52,94	51,63	78,64	57,17
3	43,06	54,97	46,35	49,65	64,50	53,89
4	38,28	36,64	39,73	44,20	44,06	46,27
5	33,49	21,87	33,42	38,75	26,96	38,96
6	28,71	15,95	28,02	33,30	19,03	32,61
7	23,93	11,91	22,71	27,85	14,15	26,48
8	19,13	11,02	17,70	22,39	12,68	20,67
9	14,35	8,44	12,42	16,93	9,94	14,62
10	9,47	5,92	7,13	11,48	7,02	8,53
11	4,78	3,29	1,81	6,03	4,04	2,41
12	0,00	0,00	0,00	0,58	0,39	0,19
13				0,00	0,00	0,00

i  $\Delta t=12h$	Evento 13			Evento 14		
	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)
	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	9,22	17,35	9,39	26,72	53,82	27,64
2	18,43	27,88	20,65	53,43	82,87	60,64
3	79,70	139,68	82,34	56,98	79,98	62,10
4	140,94	203,28	156,80	114,00	173,32	120,37
5	170,54	236,22	181,67	189,47	267,51	206,73
6	200,13	236,32	215,27	200,80	246,20	218,34
7	176,86	164,34	183,71	177,17	166,16	185,10
8	153,59	109,73	154,20	153,52	107,41	153,66
9	130,32	73,35	125,87	130,67	75,69	125,54
10	107,02	58,19	99,93	107,82	58,62	99,17
11	83,76	45,05	73,69	84,00	48,80	72,52
12	60,47	34,91	49,41	60,20	36,22	50,79
13	39,04	24,18	25,17	41,74	27,12	29,74
14	17,62	10,36	12,05	23,29	16,54	10,35
15	8,81	5,73	2,08	6,62	5,39	1,74
16	0,00	0,00	0,00	0,63	0,38	0,57
17				0,47	0,30	0,39
18				0,32	0,23	0,21
19				0,16	0,15	0,02
20				0,00	0,00	0,00

i Δt=12h	Evento 15		
	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)	Vazão Superf. (m³/s)
	MODELO HU1	MODELO HU2	MODELO HU3
0	0,00	0,00	0,00
1	34,20	63,55	35,29
2	96,50	155,28	107,51
3	149,95	221,35	166,04
4	377,27	596,29	403,17
5	649,94	925,43	725,81
6	746,64	968,70	820,41
7	742,51	758,38	794,26
8	673,54	539,04	686,93
9	607,16	401,22	597,00
10	520,82	342,32	490,80
11	431,27	289,83	387,74
12	367,05	302,79	319,73
13	333,72	335,97	291,58
14	265,01	263,82	218,10
15	173,86	134,26	151,25
16	147,07	125,77	132,43
17	137,08	123,29	137,63
18	114,28	97,08	108,83
19	91,47	61,89	85,01
20	73,24	45,60	63,94
21	55,23	32,03	45,17
22	76,75	105,47	68,27
23	97,95	137,64	105,40
24	81,08	91,02	87,05
25	69,03	45,06	67,80
26	56,98	31,64	51,42
27	44,92	26,83	42,13
28	37,44	24,51	33,63
29	29,94	21,51	25,61
30	22,45	15,64	17,35
31	14,97	8,48	8,71
32	7,48	7,99	0,08
33	0,00	0,00	0,00

### **Apêndice 3**

#### **Estimativas Obtidas com o Modelo Autoregressivo**

i	Evento 11			Evento 12		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)
	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3
0	--	--	--	--	--	--
1	--	--	--		--	--
2	57,47	56,64	56,99	114,48	124,28	135,24
3	70,58	71,76	82,53	99,20	104,46	118,35
4	83,79	86,93	98,06	59,13	56,45	51,17
5	67,64	67,20	62,88	56,14	53,73	39,49
6	58,16	56,19	43,20	48,00	44,43	31,70
7	50,74	47,73	35,20	47,92	44,64	28,19
8	50,95	48,30	34,02	42,39	38,11	20,90
9	48,30	45,24	31,02	43,25	39,24	21,26
10	47,96	44,90	30,14	40,95	36,42	17,89
11	44,92	41,27	25,93	41,29	36,77	17,99
12	45,35	41,81	26,52	37,85	32,51	12,19
13				39,20	34,05	14,21

i	Evento 13			Evento 14		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)
	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3
0	--	--	--	--	--	--
1	--	--	--	--	--	--
2	54,44	52,19	39,99	61,63	60,32	53,82
3	88,24	92,79	106,73	60,97	59,16	49,42
4	190,03	217,10	251,55	55,66	52,25	47,72
5	200,79	230,50	283,00	99,68	108,82	91,49
6	179,30	205,22	275,60	223,00	270,93	312,07
7	125,37	136,43	172,04	160,59	184,47	240,59
8	106,00	114,75	119,95	111,84	121,49	139,92
9	79,84	81,82	88,03	88,64	93,01	116,24
10	84,58	88,82	93,78	86,27	90,94	114,70
11	73,32	74,44	77,16	113,74	126,98	137,26
12	76,26	78,41	81,85	79,42	82,29	94,01
13	64,87	63,79	62,45	72,79	73,95	85,64
14	64,73	63,75	59,86	67,52	67,23	68,32
15	57,37	54,34	48,42	65,75	65,02	61,79
16	60,68	58,68	54,22	60,96	58,87	55,60
17				60,16	57,89	52,22
18				55,85	52,33	45,86
19				55,66	52,11	44,15
20				54,37	50,46	41,45

$i$ $\Delta t=12h$	Evento 15		
	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)	Vazão Total (m³/s)
	MODELO AR1	MODELO AR2	MODELO AR3
0	--	--	--
1	--	--	--
2	87,13	92,90	121,76
3	115,42	129,47	178,30
4	329,29	420,08	670,90
5	457,15	649,52	899,89
6	650,41	1081,57	1139,97
7	492,48	719,81	844,44
8	297,53	365,67	520,00
9	246,93	334,69	473,60
10	268,50	387,45	444,49
11	237,20	338,35	370,53
12	217,20	307,69	351,49
13	216,49	308,18	340,39
14	194,38	272,72	289,80
15	170,40	234,05	241,59
16	139,02	183,12	198,99
17	158,86	215,68	234,89
18	142,08	187,86	202,59
19	125,41	162,49	163,70
20	106,37	130,23	138,60
21	100,25	120,55	134,49
22	118,92	150,70	134,10
23	117,46	148,44	156,59
24	97,20	115,69	133,30
25	92,02	107,19	114,19
26	84,97	95,69	95,49
27	83,59	93,38	94,19
28	77,52	83,53	85,40
29	76,37	77,83	75,95
30	70,14	71,49	71,69
31	69,92	71,09	70,31
32	66,20	65,07	64,47
33	65,58	64,02	62,30



**APÊNDICE 4**  
**Programas Computacionais**

**Programa KALMAN1** - Obtenção das ordenadas do Hidrograma Unitário;  
 Algoritmo sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância (Quadro 3.1)

Desenvolvimento e Implementação: Júlio Gomes.

```

program KALMAN1;

uses CRT;

var
  t,tt,evento,ne,nhu,nd,nd1,nd2,posx,posy:integer;
  np,nq:array [1..20] of integer;
  p0,r,q,z,reqm,area,dt:real;
  pp,qgo:array [1..50] of real;
  tr,ni: array[0..300] of real;
  hu,x,h,tal,gk:array [1..15] of real;
  qo,qest,p: array [1..50,1..20] of real;
  pr: array[1..15,1..15] of real;
  dec,decl,decr:char;

procedure ENTRADA1;      {ENTRADA DE DADOS}

var
  i,j:integer;

begin
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Entre com a area da bacia (Km2): ');
  read(area);
  gotoxy(3,5);
  write('Entre com o intervalo de tempo (horas): ');
  read(dt);
  gotoxy(3,7);
  write('Entre com o numero de eventos : ');
  read(ne);
  for J := 1 to ne do
    begin
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com o numero de intervalos de vazao');
      read(nq[j]);
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com as vazoes observadas');
    end
  end

```

```

    for I:= 1 to nq[j] do
        begin
            gotoxy(5,6+i);
            read(qo[i,j]);
        end;
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
    gotoxy(3,5);
    write('Entre com o numero de intervalos de
            precipitacao');
    read(np[j]);
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
    gotoxy(3,5);
    write('Entre com as precipitacoes observadas');
    for I:= 1 to np[j] do
        begin
            gotoxy(5,6+i);
            read(p[i,j]);
            p[i,j]:=p[i,j]/10;
        end;
    end;
    nd:=0;
    nd1:=0;
    for i:= 1 to ne do
        begin
            nd:=nd+nq[i];
            if (i<=10) then
                nd1:=nd1+nq[i];
        end;
    nd2:=nd-nd1;
    nhu:=nq[1]-np[1]+1;
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com os valores de TAL');
    for i:= 1 to nhu do
        begin
            gotoxy(5,4+i);
            read(tal[i]);
        end;
    end;
end;

```

```

procedure ENTRADA2;     {ENTRADA DE DADOS}

```

```

var
    i:integer;
    DEC2:char;

```

```

begin
    repeat

```



```

    if (dec2='S') then
    begin
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Entre com o valor de R : ');
        read(R);
    end
    else
        r:=1;
end;

```

```

procedure INICIA;      {INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS}

```

```

var
    i,j:integer;

begin
    for I:= 1 to nhu do
    begin
        x[i]:=hu[i];
        for j:= 1 to nhu do
            if(i=j) then
                pr[i,j]:=p0
            else
                pr[i,j]:=0;
        end;
    end;
end;

```

```

procedure MONTAH;      {DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO H}

```

```

var
    j,ind1:integer;

begin
    for j:= 1 to nhu do
        h[j]:=0;
    for j:= 1 to np[evento] do
    begin
        ind1:=t-j+1;
        if((ind1>0) and (ind1<=nhu)) then
            h[ind1]:=pp[j];
        end;
    end;
end;

```

```

procedure INOV;      {CÁLCULO DA INOVAÇÃO}

```

```

var
    i:integer;
    soma:real;

```

```

begin
  soma:=0;
  for i:= 1 to nhu do
    soma := soma + h[i]*x[i];
  gest[t,evento]:=soma;
  ni[tt]:=qgo[t]-gest[t,evento];
end;

```

```

procedure ESTZ;

```

```

var
  i,j:integer;
  c: array [1..15] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;
      for i:= 1 to nhu do
        c[j]:= c[j] + h[i]*pr[i,j];
      end;
      z:=0;
      for i:= 1 to nhu do
        z:=z+c[i]*h[i];
      z:=z+r;
    end;
end;

```

```

procedure GANHOS;          {CÁLCULO DA MATRIZ DE GANHOS K}

```

```

var
  i,j:integer;

begin
  for i:= 1 to nhu do
    begin
      gk[i]:=0;
      for j:= 1 to nhu do
        gk[i]:=gk[i] + pr[i,j]*h[j];
      gk[i]:=gk[i]/z;
    end;
  end;
end;

```

```

procedure CORRP;          {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA
                           DOS ERROS DE ESTIMATIVA P}

```

```

var
  i,j,k:integer;

```

```

c,d:array [1..15,1..15] of real;

begin
  for I:= 1 to nhu do
    for j:= 1 to nhu do
      begin
        c[i,j]:=-gk[i]*h[j];
        if(i=j) then
          c[i,j]:=c[i,j]+1;
        end;
      for i := 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
          begin
            d[i,j]:=0;
            for k := 1 to nhu do
              d[i,j]:= d[i,j]+c[i,k]*pr[k,j];
            end;
          for I:= 1 to nhu do
            for J:= 1 to nhu do
              pr[i,j]:=d[i,j];
            end;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

**procedure CORR;            {ATUALIZAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA}**

```

var
  i:integer;

begin
  for I:= 1 to nhu do
    x[i] := x[i] + gk[i]*ni[tt];
  end;
end;

```

**procedure CORRECAO;    {RESTRICÇÕES}**

```

var
  i:integer;
  vunit,vest,somaq,minx,peso:real;

begin
  vunit:=10000*area;
  minx:=0;
  for i := 1 to nhu do
    if(minx>x[i]) then
      minx:=x[i];
    if(minx<0) then
      for I := 1 to nhu do
        x[i]:=x[i]-minx;
      end;
    somaq:=0;
    for i:= 1 to nhu do
      somaq:=somaq + x[i];
    end;
    vest:=3600*dt*somaq;
  end;
end;

```

```

    peso:=vunit/vest;
    for i := 1 to nhu do
        x[i]:=peso*x[i];
    end;

```

```

procedure ESTP;          {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS
                           ERROS DE ESTIMATIVA P}

```

```

var
    i,j:integer;
    c: array [1..15,1..15] of real;

```

```

begin
    for i:= 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
            c[i,j]:=q*tal[i]*tal[j];
        for i:= 1 to nhu do
            for j:= 1 to nhu do
                pr[i,j]:=pr[i,j]+c[i,j];
            end;
        end;
    end;

```

```

procedure ERRO;          {CÁLCULO DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO
                           MÉDIO}

```

```

var
    i,j:integer;
    soma,somal:real;

```

```

begin
    soma:=0;
    somal:=0;
    for j:= 11 to ne do
        for i:= 1 to nq[j] do
            begin
                soma:=soma + (qo[i,j]-qest[i,j])*(qo[i,j]-qest[i,j]);
                somal:=somal+1;
            end;
        reqm:=sqrt(soma/somal);
        gotoxy(15,posy-1);
        write (reqm);
    end;

```

```

procedure IMP1;          {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    I,j:integer;

begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);

```



```

write('ordenadas dos HU apos o evento ',evento:2);
gotoxy(5,5);
write('i');
gotoxy(15,5);
write('HU');
posy:=6;
for J:= 1 to nhu do
  begin
    posy:=posy+1;
    gotoxy(5,6+j);
    write(j:2);
    gotoxy(12,6+j);
    write(x[j]:12:5);
  end;
end;

```

```

procedure IMP2;          {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
  i,j,npag,ind1,ind2,ind3:integer;
  dec2:char;

```

```

begin
  gotoxy(3,2);
  write('RESULTADOS');
  npag:=trunc((nd-1)/30)+1;
  for j:= 1 to npag do
    begin
      clrscr;
      ind1:=30*(j-1)+1;
      ind2:=ind1+14;
      ind3:=ind1+29;
      if(ind2>nd) then
        begin
          ind2:=nd;
          ind3:=nd;
        end;
      if(ind3>nd) then
        ind3:=nd;
      gotoxy(1,4);
      write('i');
      gotoxy(7,4);
      write('inov. ');
      gotoxy(17,4);
      write('traco-Pr');
      posy:=5;
      for i := ind1 to ind2 do
        begin
          posy:=posy+1;
          gotoxy(1,posy);
          write(i:2);
          gotoxy(7,posy);
          write(ni[i]:9:3);

```

```

        gotoxy(17, posy);
        write(tr[i]:9:3);
    end;
    if(ind2<nd) then
    begin
        gotoxy(41,4);
        write('i');
        gotoxy(47,4);
        write('inov. ');
        gotoxy(57,4);
        write('traco-Pr');
        posy:=5;
    end;
    for i := ind2+1 to ind3 do
    begin
        posy:=posy+1;
        gotoxy(41, posy);
        write(i:2);
        gotoxy(47, posy);
        write(ni[i]:9:3);
        gotoxy(57, posy);
        write(tr[i]:9:3);
    end;
    posy:=20;
    posy:=posy+2;
    if (j<>npaG) then
    begin
        gotoxy(15, posy);
        write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
                resultados');
        dec2:=readkey;
    end;
    end;
end;

```

#### **{PROGRAMA PRINCIPAL}**

```

var
    I:integer;

begin
    ENTRADA1;
    repeat
        ENTRADA2;
        INICIA;
        tt:=0;
        for evento := 1 to ne do
            begin
                for i:= 1 to np[evento] do
                    pp[i]:=p[i,evento];
                for i:= 1 to nq[evento] do
                    qqo[i]:=qo[i,evento];
            end;
        end;
    until tt=1;
end;

```

```

for t := 1 to nq[evento] do
  begin
    tt:=tt+1;
    MONTAH;
    INOV;
    ESTZ;
    GANHO;
    CORRP;
    CORRXX;
    if (decr='S') then
      CORRECAO;
    ESTP;
    tr[tt]:=0;
    for I := 1 to nhu do
      tr[tt]:=tr[tt]+pr[i,i];
    end;
    IMP1;
    posy:=posy+1;
    gotoxy(15,posy);
    write('tecle <ENTER> para continuar a execucao');
    dec1:=readkey;
  end;
IMP2;
ERRO;
repeat
  gotoxy(15,posy);
  write('Deseja outra execucao ? (S/N)');
  dec:=readkey;
  dec:=upcase(dec);
  until ((dec='S') or (dec='N'));
until (dec='N');
end.

```

**Programa KALMAN2** - Obtenção das ordenadas do Hidrograma Unitário;  
 Algoritmo com correção dos ruídos e das matrizes de covariância (Quadro 3.2)

Desenvolvimento e Implementação : Júlio Gomes

```
program KALMAN2;
```

```
uses CRT;
```

```
var
```

```
  t,tt,evento,ne,nd,nd1,nd2,nhu,posx,posy:integer;
  np,nq:array [1..20] of integer;
  reqm,z,area,dt,p0:real;
  pp,qgo:array [1..50] of real;
  hu,x,h,tal,gk:array [1..15] of real;
  w,q,v,r,tr,ni:array [0..300] of real;
  qo,qest,p: array [1..50,1..20] of real;
  pr,prl: array[1..15,1..15] of real;
  dec,dec1,decr:char;
```

```
procedure ENTRADA1;      {ENTRADA DE DADOS}
```

```
var
```

```
  i,j:integer;
```

```
begin
```

```
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Entre com o area de drenagem da bacia (km2): ');
  read(area);
  gotoxy(3,5);
  write('Entre com o intervalo de tempo (horas): ');
  read(dt);
  gotoxy(3,7);
  write('Entre com o numero de eventos : ');
  read(ne);
  for J := 1 to ne do
    begin
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com o numero de intervalos de vazao');
      read(nq[j]);
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com as vazoes observadas');
      for I:= 1 to nq[j] do
```

```

begin
  gotoxy(5,6+i);
  read(qo[i,j]);
end;
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
gotoxy(3,5);
write('Entre com o numero de intervalos de
      precipitacao');
read(np[j]);
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
gotoxy(3,5);
write('Entre com as precipitacoes observadas');
for I:= 1 to np[j] do
  begin
    gotoxy(5,6+i);
    read(p[i,j]);
    p[i,j]:=p[i,j]/10;
  end;
end;
nd:=0;
nd1:=0;
for I:= 1 to ne do
  begin
    nd:=nd+nq[i];
    if(i<=10) then
      nd1:=nd1+nq[i];
    end;
  nd2:=nd-nd1;
  nhu:=nq[1]-np[1]+1;
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Entre com os valores de TAL');
  for i:= 1 to nhu do
    begin
      gotoxy(5,4+i);
      read(tal[i]);
    end;
  end;
end;

```

```

procedure ENTRADA2;    {ENTRADA DE DADOS}

```

```

var
  i:integer;
  DEC2:char;

begin
  repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);

```

```

    write('Deseja usar restricoes? (S/N)');
    decr:=readkey;
    decr:=upcase(decr);
until ((decr='S') or (decr='N'));
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('Entre com a estimativa inicial do H.U. ');
for i:= 1 to nhu do
    begin
        gotoxy(5,4+i);
        read(hu[i]);
    end;
repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Deseja alterar a matriz de probabilidade inicial P?
          (S/N)');
    dec2:=readkey;
    dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
    begin
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Entre com o valor de P0 : ');
        read(P0);
    end
    else
        P0:=1;
tr[0]:=nhu*p0;
repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Deseja alterar o valor da variancia Q? (S/N)');
    dec2:=readkey;
    dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
    begin
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Entre com o valor de Q : ');
        read(Q[1]);
    end
    else
        q[1]:=1;
repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Deseja alterar o valor da variancia R? (S/N)');
    dec2:=readkey;
    dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
    begin

```

```

        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Entre com o valor de R : ');
        read(R[0]);
    end
    else
        r[0]:=1;
end;

```

**procedure INICIA;            {INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS}**

```

var
    i,j:integer;

begin
    w[1]:=0;
    v[1]:=0;
    for I:= 1 to nhu do
        begin
            x[i]:=hu[i];
            for j:= 1 to nhu do
                if(i=j) then
                    begin
                        pr[i,j]:=p0;
                        pr1[i,j]:=p0;
                    end
                else
                    begin
                        pr[i,j]:=0;
                        pr1[i,j]:=0;
                    end;
            end;
        end;
    end;
end;

```

**procedure MONTAH;            {DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO H}**

```

var
    j,ind1:integer;

begin
    for j:= 1 to nhu do
        h[j]:=0;
    for j:= 1 to np[evento] do
        begin
            ind1:=t-j+1;
            if((ind1>0) and (ind1<=nhu)) then
                h[ind1]:=pp[j];
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

procedure INOV;           {CÁLCULO DA INOVAÇÃO E ATUALIZAÇÃO DO
                           RUÍDO DE OBSERVAÇÃO v}

```

```

var
  i:integer;
  soma:real;

begin
  soma:=0;
  for i:= 1 to nhu do
    soma := soma + h[i]*x[i];
  qest[t,evento]:=soma;
  ni[tt]:=qgo[t]-qest[t,evento];
  if(tt<>1) then
    begin
      v[tt]:=((tt-1)*v[tt-1]+ni[tt])/tt;
      ni[tt]:=ni[tt]-v[tt];
    end;
  end;
end;

```

```

procedure CALCR;          {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA R}

```

```

var
  i,j: integer;
  soma,aux:real;
  c:array [1..15] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;
      for i := 1 to nhu do
        c[j] := c[j] + h[i]*pr[i,j];
      end;
      soma:=0;
      for I := 1 to nhu do
        soma := soma + c[i]*h[i];
      aux:=ni[tt]*ni[tt]-soma;
      r[tt]:=((tt-1)*r[tt-1]+aux)/tt;
    end;
  end;
end;

```

```

procedure ESTZ;

```

```

var
  i,j:integer;
  c: array [1..15] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;

```



```

        for i:= 1 to nhu do
            c[j]:= c[j] + h[i]*pr[i,j];
        end;
    z:=0;
    for i:= 1 to nhu do
        z:=z+c[i]*h[i];
    z:=z+r[tt];
end;

```

**procedure GANHO;                    {CÁLCULO DA MATRIZ DE GANHO K}**

```

var
    i,j:integer;
begin
    for i:= 1 to nhu do
        begin
            gk[i]:=0;
            for j:= 1 to nhu do
                gk[i]:=gk[i] + pr[i,j]*h[j];
            gk[i]:=gk[i]/z;
        end;
    end;
end;

```

**procedure CORRP;                    {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA  
DOS ERROS DE ESTIMATIVA P}**

```

var
    i,j,k:integer;
    c,d:array [1..15,1..15] of real;
begin
    for I:= 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
            begin
                c[i,j]:=-gk[i]*h[j];
                if(i=j) then
                    c[i,j]:=c[i,j]+1;
            end;
        for i := 1 to nhu do
            for j:= 1 to nhu do
                begin
                    d[i,j]:=0;
                    for k := 1 to nhu do
                        d[i,j]:= d[i,j]+c[i,k]*pr[k,j];
                    end;
                for I:= 1 to nhu do
                    for J:= 1 to nhu do
                        pr[i,j]:=d[i,j];
                    end;
                end;
            end;
        end;
end;

```

```
procedure CORRX;      {ATUALIZAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA}
```

```
var
  i:integer;

begin
  for i := 1 to nhu do
    x[i] := x[i] + gk[i]*ni[tt];
  end;
```

```
procedure CORRW;      {ESTIMATIVA DO RUÍDO DO SISTEMA w}
```

```
var
  i:integer;
  aux,aux1:real;

begin
  aux:=0;
  aux1:=0;
  for i := 1 to nhu do
    begin
      aux:=aux+tal[i]*tal[i];
      aux1:=aux1+tal[i]*gk[i];
    end;
  aux:=ni[tt]*aux1/aux;
  w[tt+1]:=w[tt]+aux/tt;
end;
```

```
procedure CORRECAO;  {RESTRIÇÕES}
```

```
var
  i:integer;
  vunit,vest,somaq,minx,peso:real;

begin
  vunit:=10000*area;
  minx:=0;
  for i := 1 to nhu do
    if(minx>x[i]) then
      minx:=x[i];
  if(minx<0) then
    for I := 1 to nhu do
      x[i]:=x[i]-minx;
  somaq:=0;
  for i:= 1 to nhu do
    somaq:=somaq + x[i];
  vest:=3600*dt*somaq;
  peso:=vunit/vest;
  for i := 1 to nhu do
    x[i]:=peso*x[i];
end;
```

```

procedure CALCQ;      {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS
                       ERROS DO SISTEMA Q}

```

```

var
  i,j:integer;
  aux,aux1:real;
  a: array [1..15] of real;

begin
  for i := 1 to nhu do
    for J := 1 to nhu do
      begin
        aux := ni[tt]*ni[tt]*gk[i]*gk[j];
        pr1[i,j]:=aux + pr[i,j] - pr1[i,j];
      end;
    for i := 1 to nhu do
      begin
        a[i] := 0;
        for J := 1 to nhu do
          a[i]:= a[i] + tal[j] * pr1[i,j];
        end;
      aux:=0;
      aux1:=0;
      for I := 1 to nhu do
        begin
          aux:=aux + tal[i]*a[i];
          aux1:=aux1 + tal[i]*tal[i];
        end;
      aux:=aux/(aux1*aux1);
      q[tt+1]:=((tt-1)*q[tt]+aux)/tt;
    end;

```

```

procedure ESTP;      {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA
                       DOS ERROS DE ESTIMATIVA P}

```

```

var
  i,j:integer;
  c: array [1..15,1..15] of real;

begin
  for i:= 1 to nhu do
    for j:= 1 to nhu do
      c[i,j]:=q[tt+1]*tal[i]*tal[j];
    for i:= 1 to nhu do
      for j:= 1 to nhu do
        pr[i,j]:=pr[i,j]+c[i,j];
      end;
    end;

```

```
procedure ESTX;           {ESTIMATIVA DO ESTADO DO SISTEMA}
```

```
var
  i:integer;

begin
  for I:= 1 to nhu do
    x[i] := x[i] + tal[i]*w[tt+1];
end;
```

```
procedure ERRO;           {CÁLCULO DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO
                           MÉDIO}
```

```
var
  i,j:integer;
  soma,somal:real;

begin
  soma:=0;
  somal:=0;
  for j:= 11 to ne do
    for i:= 1 to nq[j] do
      begin
        soma:=soma + (qo[i,j]-gest[i,j])*(qo[i,j]-gest[i,j]);
        somal:=somal+1;
      end;
  reqm:=sqrt(soma/somal);
  gotoxy(15,posy-1);
  write (reqm);
end;
```

```
procedure IMP1;           {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}
```

```
var
  j:integer;

begin
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('ordenadas dos HU apos o evento ',evento:2);
  gotoxy(5,5);
  write('i');
  gotoxy(15,5);
  write('HU');
  posy:=6;
  for J:= 1 to nhu do
    begin
      posy:=posy+1;
      gotoxy(5,6+j);
      write(j:2);
      gotoxy(12,6+j);
```

```

        write(x[j]:12:5);
    end;
end;

```

```

procedure IMP2;          {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    i,j,npag,ind1,ind2,ind3:integer;
    dec2:char;

```

```

begin
    clrscr;
    gotoxy(3,2);
    write('RESULTADOS');
    npag:=trunc((nd-1)/30)+1;
    for j:= 1 to npag do
    begin
        clrscr;
        ind1:=30*(j-1)+1;
        ind2:=ind1+14;
        ind3:=ind1+29;
        if(ind2>nd) then
        begin
            ind2:=nd;
            ind3:=nd;
        end;
        if(ind3>nd) then
            ind3:=nd;
        gotoxy(1,4);
        write('i');
        gotoxy(7,4);
        write('inov. ');
        gotoxy(17,4);
        write('w');
        gotoxy(27,4);
        write('v');
        posy:=5;
        for i := ind1 to ind2 do
        begin
            posy:=posy+1;
            gotoxy(1,posy);
            write(i:2);
            gotoxy(7,posy);
            write(ni[i]:9:3);
            gotoxy(17,posy);
            write(w[i]:9);
            gotoxy(27,posy);
            write(v[i]:9);
        end;
        if(ind2<nd) then
        begin
            gotoxy(41,4);
            write('i');
        end;
    end;
end;

```

```

        gotoxy(47,4);
        write('inov.');
```

gotoxy(57,4);	write('w');
gotoxy(67,4);	write('v');

```

        posy:=5;
    end;
    for i := ind2+1 to ind3 do
    begin
        posy:=posy+1;
        gotoxy(41,posy);
        write(i:2);
        gotoxy(47,posy);
        write(ni[i]:9:3);
        gotoxy(57,posy);
        write(w[i]:9);
        gotoxy(67,posy);
        write(v[i]:9);
    end;
    posy:=20;
    posy:=posy+2;
    gotoxy(15,posy);
    write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
        resultados');
    dec2:=readkey;
    end;
    for j:= 1 to npag do
    begin
        clrscr;
        ind1:=30*(j-1)+1;
        ind2:=ind1+14;
        ind3:=ind1+29;
        if(ind2>nd) then
        begin
            ind2:=nd;
            ind3:=nd;
        end;
        if(ind3>nd) then
            ind3:=nd;
        gotoxy(1,4);
        write('i');
        gotoxy(7,4);
        write('tr');
        gotoxy(17,4);
        write('Q');
        gotoxy(27,4);
        write('R');
        posy:=5;
        for i := ind1 to ind2 do
        begin
            posy:=posy+1;
            gotoxy(1,posy);
            write(i:2);
            gotoxy(7,posy);

```

```

        write(tr[i]:9);
        gotoxy(17, posy);
        write(q[i]:9);
        gotoxy(27, posy);
        write(r[i]:9:3);
    end;
    if(ind2<nd) then
    begin
        gotoxy(41,4);
        write('i');
        gotoxy(47,4);
        write('tr. ');
        gotoxy(57,4);
        write('Q');
        gotoxy(67,4);
        write('R');
        posy:=5;
    end;
    for i := ind2+1 to ind3 do
    begin
        posy:=posy+1;
        gotoxy(41, posy);
        write(i:2);
        gotoxy(47, posy);
        write(tr[i]:9);
        gotoxy(57, posy);
        write(q[i]:9);
        gotoxy(67, posy);
        write(r[i]:9:3);
    end;
    posy:=20;
    posy:=posy+2;
    if (j<>npaG) then
    begin
        gotoxy(15, posy);
        write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
                resultados');
        dec2:=readkey;
    end;
    end;
end;

```

#### **{PROGRAMA PRINCIPAL}**

```

var
    I,j:integer;

begin
    ENTRADA1;
    repeat
        ENTRADA2;
        INICIA;
    until

```

```

tt:=0;
for evento := 1 to ne do
  begin
    for i:= 1 to np[evento] do
      pp[i]:=p[i,evento];
    for i:= 1 to nq[evento] do
      qgo[i]:=qo[i,evento];
    for t := 1 to nq[evento] do
      begin
        tt:=tt+1;
        MONTAH;
        INOV;
        CALCR;
        ESTZ;
        GANHO;
        CORRP;
        CORRX;
        if (decr='S') then
          CORRECAO;
        CORRW;
        CALCQ;
        tr[tt]:=0;
        for i := 1 to nhu do
          begin
            tr[tt]:=tr[tt]+pr[i,i];
            for j := 1 to nhu do
              pr1[i,j] := pr[i,j];
            end;
          ESTP;
          ESTX;
          if (decr='S') then
            CORRECAO;
          end;
        IMP1;
        posy:=posy+1;
        gotoxy(15,posy);
        write('tecle <ENTER> para continuar a execucao');
        dec1:=readkey;
      end;
    IMP2;
    ERRO;
    repeat
      gotoxy(15,posy);
      write('Deseja outra execucao ? (S/N)');
      dec:=readkey;
      dec:=upcase(dec);
    until ((dec='S') or (dec='N'));
  until (dec='N');
end.

```



**Programa KALMAN3** - Obtenção dos parâmetros do modelo  
autoregressivo;  
Algoritmo sem correção dos ruídos e das  
matrizes de covariância (Quadro 3.1).

Desenvolvimento e Implementação: Júlio Gomes

```
program KALMAN3;
```

```
uses CRT;
```

```
var
```

```
  t,tt,evento,ne,nhu,nd,nd1,nd2,posx,posy:integer;  
  nq:array [1..20] of integer;  
  p0,r,q,z,qmed,reqm:real;  
  par,x,h,tal,gk:array [1..5] of real;  
  qgo: array [1..50] of real;  
  tr,ni: array[0..300] of real;  
  qo,qest: array [1..50,1..20] of real;  
  pr: array[1..5,1..5] of real;  
  dec,decl,decr:char;
```

```
procedure ENTRADA1;      {ENTRADA DE DADOS}
```

```
var
```

```
  i,j:integer;
```

```
begin
```

```
  clrscr;  
  gotoxy(3,3);  
  write('Entre com o numero de eventos : ');  
  read(ne);  
  for J := 1 to ne do  
    begin  
      clrscr;  
      gotoxy(3,3);  
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);  
      gotoxy(3,5);  
      write('Entre com o numero de intervalos de vazao');  
      read(nq[j]);  
      clrscr;  
      gotoxy(3,3);  
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);  
      gotoxy(3,5);  
      write('Entre com as vazoes observadas');  
      for I:= 1 to nq[j] do  
        begin  
          gotoxy(5,6+i);  
          read(qo[i,j]);  
        end;  
    end;  
end;
```

```

clrscr;
gotoxy(3,3);
write('Entre com a media do processo');
read(qmed);
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('Entre com a ordem do modelo autoregressivo');
read(nhu);
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('Entre com os valores de TAL');
for i:= 1 to nhu do
    begin
        gotoxy(5,4+i);
        read(tal[i]);
    end;
end;

```

```

procedure ENTRADA2;    {ENTRADA DE DADOS}

```

```

var
    i:integer;
    DEC2:char;

begin
    repeat
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Deseja usar restricoes? (S/N)');
        decr:=readkey;
        decr:=upcase(decr);
        until ((decr='S') or (decr='N'));
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('Entre com a estimativa inicial dos parametros do
            modelo');
        for i:= 1 to nhu do
            begin
                gotoxy(5,4+i);
                read(par[i]);
            end;
        nd:=0;
        nd1:=0;
        for i:= 1 to ne do
            begin
                nd:=nd+nq[i];
                if (i<=10) then
                    nd1:=nd1+nq[i];
            end;
        nd:=nd-ne*nhu;
        nd1:=nd1-10*nhu;
        nd2:=nd-nd1;
    end;

```

```

repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar a matriz inicial de probabilidades P?
        (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de P0 : ');
    read(P0);
  end
  else
    p0:=1;
tr[0]:=nhu*p0;
repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar o valor da variancia Q? (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de Q : ');
    read(Q);
  end
  else
    q:=1;
repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar o valor da variancia R? (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de R : ');
    read(R);
  end
  else
    r:=1;
end;
end;

```

```
procedure INICIA;      {INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS}
```

```
var
```

```
  i,j:integer;
```

```
begin
```

```
  for I:= 1 to nhu do
```

```
    begin
```

```
      x[i]:=par[i];
```

```
      for j:= 1 to nhu do
```

```
        if(i=j) then
```

```
          pr[i,j]:=p0
```

```
        else
```

```
          pr[i,j]:=0;
```

```
      end;
```

```
end;
```

```
procedure MONTAH;      {DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO H}
```

```
var
```

```
  j:integer;
```

```
begin
```

```
  for j:= 1 to nhu do
```

```
    h[j]:=qgo[t-j]-qmed;
```

```
end;
```

```
procedure VERIFICA;    {RESTRIÇÕES}
```

```
var
```

```
  j,k,modif:integer;
```

```
  aux,soma:real;
```

```
  niaux: array [1..2] of real;
```

```
  xt: array [1..2,1..2] of real;
```

```
begin
```

```
  modif:=0;
```

```
  if (x[1]>=2) then
```

```
    x[1]:=1.999;
```

```
  if (x[1]<=-2) then
```

```
    x[1]:=-1.999;
```

```
  if (x[2]>=1) then
```

```
    x[2]:=0.999;
```

```
  if (x[2]<=-1) then
```

```
    x[2]:=-0.999;
```

```
  if( (x[1]+x[2]) >= 1) then
```

```
    begin
```

```
      modif:=1;
```

```
      xt[1,1]:=x[1];
```

```

        xt[2,1]:=0.999-x[1];
        xt[1,2]:=0.999-x[2];
        xt[2,2]:=x[2];
    end;
    if( (x[2]-x[1]) >= 1) then
    begin
        modif:=1;
        xt[1,1]:=x[1];
        xt[2,1]:=0.999+x[1];
        xt[1,2]:=-0.999+x[2];
        xt[2,2]:=x[2];
    end;
    if(modif=1) then
    begin
        aux:= qgo[t]-qmed;
        for K:= 1 to 2 do
        begin
            soma:=0;
            for j:= 1 to 2 do
                soma := soma + h[j]*xt[j,k];
            niaux[k]:=aux-soma;
        end;
        if(abs(niaux[1])<abs(niaux[2])) then
        begin
            x[1]:=xt[1,1];
            x[2]:=xt[2,1];
        end
        else
        begin
            x[1]:=xt[1,2];
            x[2]:=xt[2,2];
        end;
    end;
end;
end;

```

```

procedure INOV;           {CÁLCULO DA INOVAÇÃO}

```

```

var
    i:integer;
    soma:real;

begin
    soma:=0;
    for i:= 1 to nhu do
        soma := soma + h[i]*x[i];
    gest[t,evento]:=soma+qmed;
    ni[tt]:=(qgo[t]-qmed)-soma;
end;

```

```
procedure ESTZ;
```

```
var
  i,j:integer;
  c: array [1..5] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;
      for i:= 1 to nhu do
        c[j]:= c[j] + h[i]*pr[i,j];
      end;
    z:=0;
    for i:= 1 to nhu do
      z:=z+c[i]*h[i];
    z:=z+r;
  end;
```

```
procedure GANHO;          {CÁLCULO DA MATRIZ DE GANHO K}
```

```
var
  i,j:integer;

begin
  for i:= 1 to nhu do
    begin
      gk[i]:=0;
      for j:= 1 to nhu do
        gk[i]:=gk[i] + pr[i,j]*h[j];
      gk[i]:=gk[i]/z;
    end;
  end;
```

```
procedure CORRP;          {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO
                           ERROS DE ESTIMATIVA P}
```

```
var
  i,j,k:integer;
  c,d:array [1..5,1..5] of real;

begin
  for I:= 1 to nhu do
    for j:= 1 to nhu do
      begin
        c[i,j]:=-gk[i]*h[j];
        if(i=j) then
          c[i,j]:=c[i,j]+1;
        end;
      for i := 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
```

```

begin
  d[i,j]:=0;
  for k := 1 to nhu do
    d[i,j]:= d[i,j]+c[i,k]*pr[k,j];
  end;
  for I:= 1 to nhu do
    for J:= 1 to nhu do
      pr[i,j]:=d[i,j];
    end;
  end;
end;

```

**procedure CORR;            {ATUALIZAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA}**

```

var
  i:integer;

begin
  for I:= 1 to nhu do
    x[i] := x[i] + gk[i]*ni[tt];
  end;
end;

```

**procedure ESTP;            {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO  
ERROS DE ESTIMATIVA P}**

```

var
  i,j:integer;
  c: array [1..5,1..5] of real;

begin
  for i:= 1 to nhu do
    for j:= 1 to nhu do
      c[i,j]:=q*tal[i]*tal[j];
    end;
  for i:= 1 to nhu do
    for j:= 1 to nhu do
      pr[i,j]:=pr[i,j]+c[i,j];
    end;
  end;
end;

```

**procedure ERRO;            {CÁLCULO DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO  
MÉDIO}**

```

var
  i,j:integer;
  soma,somal:real;

begin
  soma:=0;
  somal:=0;
  for j := 11 to ne do
    for i:= nhu+1 to nq[j] do

```

```

        begin
            soma:=soma+(qo[i,j]-qest[i,j])*(qo[i,j]-qest[i,j]);
            soma1:=soma1+1;
        end;
    reqm:=sqrt(soma/soma1);
    gotoxy(15,posy-1);
    write(reqm);
end;

```

```

procedure IMP1;           {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    I,j:integer;

    begin
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('parametros do modelo apos o evento ',evento:2);
        gotoxy(5,5);
        write('i');
        gotoxy(15,5);
        write('param. ');
        posy:=6;
        for J:= 1 to nhu do
            begin
                posy:=posy+1;
                gotoxy(5,6+j);
                write(j:2);
                gotoxy(12,6+j);
                write(x[j]:12:5);
            end;
        end;
end;

```

```

procedure IMP2;           {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    i,j,npag,ind1,ind2,ind3:integer;
    dec2:char;

    begin
        gotoxy(3,2);
        write('RESULTADOS');
        npag:=trunc((nd-1)/30)+1;
        for j:= 1 to npag do
            begin
                clrscr;
                ind1:=30*(j-1)+1;
                ind2:=ind1+14;
                ind3:=ind1+29;
                if(ind2>nd) then
                    begin

```



```

        ind2:=nd;
        ind3:=nd;
    end;
    if(ind3>nd) then
        ind3:=nd;
        gotoxy(1,4);
        write('i');
        gotoxy(7,4);
        write('inov. ');
        gotoxy(17,4);
        write('traco-Pr');
        posy:=5;
        for i := ind1 to ind2 do
            begin
                posy:=posy+1;
                gotoxy(1,posy);
                write(i:2);
                gotoxy(7,posy);
                write(ni[i]:9:3);
                gotoxy(17,posy);
                write(tr[i]:9);
            end;
        if(ind2<nd) then
            begin
                gotoxy(41,4);
                write('i');
                gotoxy(47,4);
                write('inov. ');
                gotoxy(57,4);
                write('traco-Pr');
                posy:=5;
            end;
        for i := ind2+1 to ind3 do
            begin
                posy:=posy+1;
                gotoxy(41,posy);
                write(i:2);
                gotoxy(47,posy);
                write(ni[i]:9:3);
                gotoxy(57,posy);
                write(tr[i]:9);
            end;
        posy:=20;
        posy:=posy+2;
        if (j<>npag) then
            begin
                gotoxy(15,posy);
                write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
resultados');
                dec2:=readkey;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```
{PROGRAMA PRINCIPAL}
```

```
var
```

```
  I:integer;
```

```
begin
```

```
  ENTRADA1;
```

```
  repeat
```

```
    ENTRADA2;
```

```
    INICIA;
```

```
    tt:=0;
```

```
    for evento := 1 to ne do
```

```
      begin
```

```
        for i:= 1 to nq[evento] do
```

```
          qqo[i]:=qo[i,evento];
```

```
          for t := nhu+1 to nq[evento] do
```

```
            begin
```

```
              tt:=tt+1;
```

```
              MONTAH;
```

```
              if (decr='S') then
```

```
                VERIFICA;
```

```
              INOV;
```

```
              ESTZ;
```

```
              GANHO;
```

```
              if (t=nq[evento]) then
```

```
                IMP1;
```

```
              CORRP;
```

```
              CORRX;
```

```
              ESTP;
```

```
              tr[tt]:=0;
```

```
              for I := 1 to nhu do
```

```
                tr[tt]:=tr[tt]+pr[i,i];
```

```
            end;
```

```
          posy:=posy+1;
```

```
          gotoxy(15,posy);
```

```
          write('tecle <ENTER> para continuar a execucao');
```

```
          dec1:=readkey;
```

```
        end;
```

```
      IMP2;
```

```
      ERRO;
```

```
      repeat
```

```
        gotoxy(15,posy);
```

```
        write('Deseja outra execucao ? (S/N)');
```

```
        dec:=readkey;
```

```
        dec:=upcase(dec);
```

```
      until ((dec='S') or (dec='N'));
```

```
    until (dec='N');
```

```
end.
```

**Programa KALMAN4** - Obtenção das ordenadas do Hidrograma Unitário;  
 Algoritmo com correção dos ruídos e das matrizes de covariância (Quadro 3.2)

Desenvolvimento e Implementação: Júlio Gomes

```

program KALMAN4;

uses CRT;

var
  t,tt,evento,ne,nd,nd1,nd2,nhu,posy:integer;
  nq:array [1..20] of integer;
  reqm,z,p0,qmed:real;
  par,x,h,tal,gk:array [1..5] of real;
  qgo: array [1..50] of real;
  w,q,v,r,tr,ni:array [0..300] of real;
  qo,qest: array [1..50,1..20] of real;
  pr,pr1: array[1..5,1..5] of real;
  dec,decl,decr,decr1:char;

procedure ENTRADA1;      {ENTRADA DE DADOS}

var
  i,j:integer;

begin
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Entre com o numero de eventos : ');
  read(ne);
  for J := 1 to ne do
    begin
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com o numero de intervalos de vazao');
      read(nq[j]);
      clrscr;
      gotoxy(3,3);
      write('ENTRADA DE DADOS - EVENTO ',j:2);
      gotoxy(3,5);
      write('Entre com as vazoes observadas');
      for I:= 1 to nq[j] do
        begin
          gotoxy(5,6+i);
          read(qo[i,j]);
        end;
    end;
end;

```

```

clrscr;
gotoxy(3,3);
write('entre com a media do processo: ');
read(qmed);
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('entre com o numero de parametros do modelo: ');
read(nhu);
clrscr;
gotoxy(3,3);
write('Entre com os valores de TAL');
for i:= 1 to nhu do
  begin
    gotoxy(5,4+i);
    read(tal[i]);
  end;
end;

```

```

procedure ENTRADA2;    {ENTRADA DE DADOS}

```

```

var
  i:integer;
  DEC2:char;

begin
  repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Deseja usar restricoes? (S/N)');
    decr:=readkey;
    decr:=upcase(decr);
  until ((decr='S') or (decr='N'));
  repeat
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Deseja usar restr'           matrizes de covariancia?
          (S/N)');
    decr1:=readkey;
    decr1:=upcase(decr1);
  until ((decr1='S') or (decr1='N'));
  nd:=0;
  nd1:=0;
  for I:= 1 to ne do
    begin
      nd:=nd+nq[i];
      if(i<=10) then
        nd1:=nd1+nq[i];
    end;
  nd:=nd-ne*nhu;
  nd1:=nd1-10*nhu;
  nd2:=nd-nd1;
  clrscr;
  gotoxy(3,3);

```

```

write('Entre com a estimativa inicial dos parametros do
      modelo');
for i:= 1 to nhu do
  begin
    gotoxy(5,4+i);
    read(par[i]);
  end;
repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar a matriz de probabilidades inicial?
        (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de P0 : ');
    read(P0);
  end
  else
    p0:=1;
tr[0]:=nhu*p0;
repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar o valor da variancia Q? (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de Q : ');
    read(Q[1]);
  end
  else
    q[1]:=1;
repeat
  clrscr;
  gotoxy(3,3);
  write('Deseja alterar o valor da variancia R? (S/N)');
  dec2:=readkey;
  dec2:=upcase(dec2);
until ((dec2='S') or (dec2='N'));
if (dec2='S') then
  begin
    clrscr;
    gotoxy(3,3);
    write('Entre com o valor de R : ');
    read(R[0]);
  end

```

```

                else
                    r[0]:=1;
end;

```

```

procedure INICIA;      {INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS}

```

```

var
    i,j:integer;
begin
    w[1]:=0;
    v[1]:=0;
    for I:= 1 to nhu do
        begin
            x[i]:=par[i];
            for j:= 1 to nhu do
                if(i=j) then
                    begin
                        pr[i,j]:=p0;
                        pr1[i,j]:=p0;
                    end
                else
                    begin
                        pr[i,j]:=0;
                        pr1[i,j]:=0;
                    end;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

procedure MONTAH;      {DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO H}

```

```

var
    j:integer;
begin
    for j:= 1 to nhu do
        h[j]:=qqo[t-j]-qmed;
    end;
end;

```

```

procedure VERIF1;      {RESTRIÇÕES}

```

```

var
    j,k,modif:integer;
    aux,soma:real;
    niaux: array [1..2] of real;
    xt: array [1..2,1..2] of real;
begin
    modif:=0;
    if (x[1]>=2) then

```

```

        x[1]:=1.999;
    if (x[1]<=-2) then
        x[1]:=-1.999;
    if (x[2]>=1) then
        x[2]:=0.999;
    if (x[2]<=-1) then
        x[2]:=-0.999;
    if( (x[1]+x[2]) >= 1) then
        begin
            modif:=1;
            xt[1,1]:=x[1];
            xt[2,1]:=0.999-x[1];
            xt[1,2]:=0.999-x[2];
            xt[2,2]:=x[2];
        end;
    if( (x[2]-x[1]) >= 1) then
        begin
            modif:=1;
            xt[1,1]:=x[1];
            xt[2,1]:=0.999+x[1];
            xt[1,2]:=-0.999+x[2];
            xt[2,2]:=x[2];
        end;
    if(modif=1) then
        begin
            aux:= qgo[t]-qmed;
            for K:= 1 to 2 do
                begin
                    soma:=0;
                    for j:= 1 to 2 do
                        soma := soma + h[j]*xt[j,k];
                    niaux[k]:=aux-soma;
                end;
            if(abs(niaux[1])<abs(niaux[2])) then
                begin
                    x[1]:=xt[1,1];
                    x[2]:=xt[2,1];
                end
            else
                begin
                    x[1]:=xt[1,2];
                    x[2]:=xt[2,2];
                end;
        end;
    end;
end;

```

```

procedure INOV;           {CÁLCULO DA INOVAÇÃO E ATUALIZAÇÃO DO
                           RUÍDO DE OBSERVAÇÃO v}

```

```

var
    i:integer;
    soma:real;

```

```

begin
  soma:=0;
  for i:= 1 to nhu do
    soma := soma + h[i]*x[i];
  qest[t,evento]:=soma+qmed;
  ni[tt]:=(qgo[t]-qmed)-soma;
  if(tt<>1) then
    begin
      v[tt]:=((tt-1)*v[tt-1]+ni[tt])/tt;
      ni[tt]:=ni[tt]-v[tt];
    end;
  end;
end;

```

```

procedure CALCR;           {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA
                             DOS ERROS DE OBSERVAÇÃO R}

```

```

var
  i,j: integer;
  soma,aux:real;
  c:array [1..5] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;
      for i := 1 to nhu do
        c[j] := c[j] + h[i]*pr[i,j];
      end;
    soma:=0;
    for I := 1 to nhu do
      soma := soma + c[i]*h[i];
    aux:=ni[tt]*ni[tt]-soma;
    r[tt]:=((tt-1)*r[tt-1]+aux)/tt;
    if (decr1 ='S') then
      if (r[tt]<0) then
        r[tt]:=0;
    end;
end;

```

```

procedure ESTZ;

```

```

var
  i,j:integer;
  c: array [1..5] of real;

begin
  for j := 1 to nhu do
    begin
      c[j]:=0;
      for i:= 1 to nhu do
        c[j]:= c[j] + h[i]*pr[i,j];
      end;
    z:=0;

```



```

    for i:= 1 to nhu do
        z:=z+c[i]*h[i];
        z:=z+r[tt];
    end;

```

```

procedure GANHO;           {CÁLCULO DA MATRIZ DE GANHO K}

```

```

var
    i,j:integer;

begin
    for i:= 1 to nhu do
        begin
            gk[i]:=0;
            for j:= 1 to nhu do
                gk[i]:=gk[i] + pr[i,j]*h[j];
            gk[i]:=gk[i]/z;
        end;
    end;

```

```

procedure CORRP;          {ATUALIZAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA
                           DOS ERROS DE ESTIMATIVA P}

```

```

var
    i,j,k:integer;
    c,d:array [1..5,1..5] of real;

begin
    for I:= 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
            begin
                c[i,j]:=-gk[i]*h[j];
                if(i=j) then
                    c[i,j]:=c[i,j]+1;
            end;
        for i := 1 to nhu do
            for j:= 1 to nhu do
                begin
                    d[i,j]:=0;
                    for k := 1 to nhu do
                        d[i,j]:= d[i,j]+c[i,k]*pr[k,j];
                    end;
                for I:= 1 to nhu do
                    for J:= 1 to nhu do
                        pr[i,j]:=d[i,j];
            end;

```

```

procedure CORRX;          {ATUALIZAÇÃO DO ESTADO DO SISTEMA}

var
  i:integer;

begin
  for i := 1 to nhu do
    x[i] := x[i] + gk[i]*ni[tt];
  end;

procedure VERIF2;          {RESTRIÇÕES}

begin
  if (x[1]>=2) then
    x[1]:=1.999;
  if (x[1]<=-2) then
    x[1]:=-1.999;
  if (x[2]>=1) then
    x[2]:=0.999;
  if (x[2]<=-1) then
    x[2]:=-0.999;
end;

procedure CORRW;          {ESTIMATIVA DOS ERRO DO SISTEMA w}

var
  i:integer;
  aux,aux1:real;

begin
  aux:=0;
  aux1:=0;
  for i := 1 to nhu do
    begin
      aux:=aux+tal[i]*tal[i];
      aux1:=aux1+tal[i]*gk[i];
    end;
  aux:=ni[tt]*aux1/aux;
  w[tt+1]:=w[tt]+aux/tt;
end;

procedure CALCQ;          {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS
                           ERROS DO SISTEMA Q}

var
  i,j:integer;
  aux,aux1:real;
  a: array [1..5] of real;

begin
  for i := 1 to nhu do
    for J := 1 to nhu do
      begin

```

```

        aux := ni[tt]*ni[tt]*gk[i]*gk[j];
        pr1[i,j]:=aux + pr[i,j] - pr1[i,j];
    end;
for i := 1 to nhu do
    begin
        a[i] := 0;
        for J := 1 to nhu do
            a[i]:= a[i] + tal[j] * pr1[i,j];
        end;
    aux:=0;
    aux1:=0;
    for I := 1 to nhu do
        begin
            aux:=aux + tal[i]*a[i];
            aux1:=aux1 + tal[i]*tal[i];
        end;
    aux:=aux/(aux1*aux1);
    q[tt+1]:=((tt-1)*q[tt]+aux)/tt;
    if (decr1 ='S') then
        if (q[tt]<0) then
            q[tt]:=0;
    end;
end;

```

**procedure TRACO;            {CÁLCULO DO TRAÇO DA MATRIZ P}**

```

var
    i,j:integer;

begin
    tr[tt]:=0;
    for i := 1 to nhu do
        begin
            tr[tt]:=tr[tt]+pr[i,i];
            for j := 1 to nhu do
                pr1[i,j] := pr[i,j];
            end;
        end;
    end;
end;

```

**procedure ESTP;            {ESTIMATIVA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS  
ERROS DE ESTIMATIVA P}**

```

var
    i,j:integer;
    c: array [1..5,1..5] of real;

begin
    for i:= 1 to nhu do
        for j:= 1 to nhu do
            c[i,j]:=q[tt+1]*tal[i]*tal[j];
        end;
    end;
end;

```

```

        for j:= 1 to nhu do
            pr[i,j]:=pr[i,j]+c[i,j];
end;

```

```

procedure ESTX;          {ESTIMATIVA DO ESTADO DO SISTEMA}

```

```

var
    i:integer;

```

```

begin
    for I:= 1 to nhu do
        x[i] := x[i] + tal[i]*w[tt+1];
end;

```

```

procedure ERRO;          {CÁLCULO DA RAIZ DO ERRO QUADRÁTICO
                           MÉDIO}

```

```

var
    i,j:integer;
    soma,somal:real;

```

```

begin
    soma:=0;
    somal:=0;
    for j := 11 to ne do
        for i := nhu+1 to nq[j] do
            begin
                soma:=soma + (qo[i,j]-gest[i,j])*(qo[i,j]-gest[i,j]);
                somal:=somal+1;
            end;
        reqm:=sqrt(soma/somal);
        gotoxy(15,posy-1);
        write(reqm);
end;

```

```

procedure IMP1;          {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    I,j:integer;

```

```

begin
for i:=1 to ne do
    begin
        clrscr;
        gotoxy(3,3);
        write('parametros do modelo apos o evento ',evento:2);
        gotoxy(5,5);
        write('i');
        gotoxy(15,5);
        write('param. ');
        posy:=6;
        for J:= 1 to nhu do
            begin

```

```

        posy:=posy+1;
        gotoxy(5,6+j);
        write(j:2);
        gotoxy(12,6+j);
        write(x[j]:12:5);
    end;
end;
end;

```

```

procedure IMP2;          {IMPRESSÃO DOS RESULTADOS}

```

```

var
    i,j,npag,ind1,ind2,ind3:integer;
    dec2:char;

```

```

begin
    clrscr;
    gotoxy(3,2);
    write('RESULTADOS');
    npag:=trunc((nd-1)/30)+1;
    for j:= 1 to npag do
    begin
        clrscr;
        ind1:=30*(j-1)+1;
        ind2:=ind1+14;
        ind3:=ind1+29;
        if(ind2>nd) then
            begin
                ind2:=nd;
                ind3:=nd;
            end;
        if(ind3>nd) then
            ind3:=nd;
        gotoxy(1,4);
        write('i');
        gotoxy(7,4);
        write('inov. ');
        gotoxy(17,4);
        write('w');
        gotoxy(27,4);
        write('v');
        posy:=5;
        for i := ind1 to ind2 do
            begin
                posy:=posy+1;
                gotoxy(1,posy);
                write(i:2);
                gotoxy(7,posy);
                write(ni[i]:9);
                gotoxy(17,posy);
                write(w[i]:9);
                gotoxy(27,posy);
                write(v[i]:9);
            end;
        end;
    end;

```

```

if(ind2<nd) then
  begin
    gotoxy(41,4);
    write('i');
    gotoxy(47,4);
    write('inov. ');
    gotoxy(57,4);
    write('w');
    gotoxy(67,4);
    write('v');
    posy:=5;
  end;
for i := ind2+1 to ind3 do
  begin
    posy:=posy+1;
    gotoxy(41,posy);
    write(i:2);
    gotoxy(47,posy);
    write(ni[i]:9);
    gotoxy(57,posy);
    write(w[i]:9);
    gotoxy(67,posy);
    write(v[i]:9);
  end;
  posy:=20;
  posy:=posy+2;
  gotoxy(15,posy);
  write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
        resultados');
  dec2:=readkey;
end;
for j:= 1 to npag do
begin
  clrscr;
  ind1:=30*(j-1)+1;
  ind2:=ind1+14;
  ind3:=ind1+29;
  if(ind2>nd) then
    begin
      ind2:=nd;
      ind3:=nd;
    end;
  if(ind3>nd) then
    ind3:=nd;
  gotoxy(1,4);
  write('i');
  gotoxy(7,4);
  write('tr');
  gotoxy(17,4);
  write('Q');
  gotoxy(27,4);
  write('R');
  posy:=5;
  for i := ind1 to ind2 do
    begin

```

```

        posy:=posy+1;
        gotoxy(1,posy);
        write(i:2);
        gotoxy(7,posy);
        write(tr[i]:9);
        gotoxy(17,posy);
        write(q[i]:9:3);
        gotoxy(27,posy);
        write(r[i]:9);
    end;
    if(ind2<nd) then
    begin
        gotoxy(41,4);
        write('i');
        gotoxy(47,4);
        write('tr. ');
        gotoxy(57,4);
        write('Q');
        gotoxy(67,4);
        write('R');
        posy:=5;
    end;
    for i := ind2+1 to ind3 do
    begin
        posy:=posy+1;
        gotoxy(41,posy);
        write(i:2);
        gotoxy(47,posy);
        write(tr[i]:9);
        gotoxy(57,posy);
        write(q[i]:9);
        gotoxy(67,posy);
        write(r[i]:9);
    end;
    posy:=20;
    posy:=posy+2;
    if (j<>npaG) then
    begin
        gotoxy(15,posy);
        write( 'Tecle <ENTER> para a proxima pagina de
                resultados');
        dec2:=readkey;
    end;
    end;
end;

```

**{PROGRAMA PRINCIPAL}**

```

var
    I,j:integer;

```

```

begin
  ENTRADA1;
  repeat
    ENTRADA2;
    INICIA;
    tt:=0;
    for evento := 1 to ne do
      begin
        for i:= 1 to nq[evento] do
          qgo[i]:=qo[i,evento];
        for t := nhu+1 to nq[evento] do
          begin
            tt:=tt+1;
            MONTA;
            if (decr ='S') then
              VERIF1;
            if (t=nq[evento]) then
              IMP1;
            INOV;
            CALCR;
            ESTZ;
            GANHO;
            CORRP;
            CORRX;
            if (decr ='S') then
              VERIF2;
            CORRW;
            CALCQ;
            TRACO;
            ESTP;
            ESTX;
          end;
          posy:=posy+1;
          gotoxy(15,posy);
          write('tecle <ENTER> para continuar a execucao');
          dec1:=readkey;
        end;
      IMP2;
      ERRO;
      repeat
        gotoxy(15,posy);
        write('Deseja outra execucao ? (S/N)');
        dec:=readkey;
        dec:=upcase(dec);
      until ((dec='S') or (dec='N'));
    until (dec='N');
  end.

```



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BERGMAN, M. J. DELLEUR, J. W. Kalman filter estimation and prediction of daily stream flows : I. Review, algorithm, and simulation experiments. Water Resources Bulletin, v. 21, n.5, p. 815-825, Oct. 1985.
2. \_\_\_\_\_. Kalman filter estimation and prediction of daily streams flows : II. Applications to the Potomac river. Water Resources Bulletin, v. 21, n. 5, p. 827-832, Oct. 1985.
3. BRAGA JUNIOR, B. P. F. Modelos de previsão de vazão em tempo-real. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 4., Fortaleza, 1981. Anais. São Paulo, ABRH, 1981. v. 4, p.72-87.
4. BOX, G. E. P., JENKINS, G. Time series analysis, forecasting and control. Oakland : Holden Day, 1976.
5. BRAS, R. L., RODRIGUEZ-ITURBE, I. Random functions and hydrology. Reading : Addison-Wesley, 1985. 559 p.
6. CLARKE, R. T. Adaptive hydrological forecasting: a review. [S.l : s.n.], 198\_. 37p.
7. COOPER, D. M. Adaptive parameter estimation for non-linear hydrological models with general loss functions. Journal of Hydrology, v. 58, n. 1/2, p. 29-45, Aug. 1982.
8. GEER, F. C. van. Applications of Kalman filtering in the analysis and design of groundwater monitoring networks. S. 1.: TNO Institute of Applied Geoscience, 1987. 118 p.

9. GEORGAKAKOS, K. P. A generalized stochastic hydrometeorological model for flood and flash-flood forecasting. 2. Case Studies. Water Resources Research, v. 22, n. 13, p. 2096-2106, Dec. 1986.
10. HINO, M. On-line prediction of hydrologic systems. In :CONGRESS IAHR (15. : 1973 : Istaqmboul). Proceedings. Istamboul: IAHR, 1973. v. 4, p. 121-129.
11. KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Series D, v. 82, p. 35-45, 1960.
12. KALMAN, R. E., BUCY, R. New results in linear filtering and prediction theory. Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Series D, v. 83, n. 1, p. 95-108, Mar. 1961.
13. KITADINIS, P. K. BRAS, R. L. Real-time forecasting of river flows. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 1978. 324 p. (Report, 235)
14. KITADINIS, P. K. BRAS, R. L. Real-time forecasting with a conceptual hydrological model. 1. Analysis of uncertainty. Water Resources Research, v.16, n. 6, p. 1025-1033, Dec. 1980a.
15. \_\_\_\_\_. Real-time forecasting with a conceptual hydrological model. 2. Applications and results. Water Resources Research, v. 16, n. 6, p. 1034-1044, Dec. 1980b.
16. KITADINIS, P. K., LARA, O. G., LANE, R. W. Evaluation of the efficiency of streamflow data collection strategies for alluvial rivers. Journal of Hydrology, v. 72, n. 1/2, p. 85-103, Apr. 1984.

17. KUO, Jan-Tai et al. Real-time operation of Tanshui river reservoirs. Journal of Water Resources Planning and Management, v. 116, n. 3, p. 349-361, May/June 1990.
18. MAGALHAES, P. C. de. Hidrologia superficial. In: RAMOS, Fabio et al. Engenharia Hidrológica. Rio de Janeiro : ABRH : UFRJ, UFRJ, 1989. p. 201-289 (Coleção ABRH de Recursos Hídricos, 2).
19. MARTIN, W. C., STUBBERUD, A. R. An uncoupling method for linear near system identification. IEEE Transactions on Automatic Control, v. AC-21, n. 4, p. 506-509, 1976.
20. MEHRA, R. K. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. IEEE Transactions on Automatic Control, v. AC-15, n. 2, p. 175-184, 1970.
21. MINE, Miriam R. M. Modelos estocásticos lineares para previsão de cheias em tempo real. São Paulo : USP, 1984. 127 p. Dissertação (Mestrado)-USP.
22. MINE, Miriam R. M. et al. Métodos matriciais para estimativas de hidrogramas unitários. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS (6. : 1985 : São Paulo). Anais. São Paulo : ABRH, 1985. v.2, p. 231-244.
23. NASH, J. E., SUTCLIFFE, J. V. River flow forecasting through conceptual models, part I - a discussion of principles. Journal of Hydrology, v. 10, pp. 282-290. 1970.
24. O'CONNELL, P. E. Real-time hydrological forecasting and control. London : NERC, 1980. 264 p. Proceedings of 1st International Workshop, Institute of Hydrology, 1977.

25. PATRY, G. G., MARINO, M. A. Parameter identification of time-varying noisy difference equations for real-time urban runoff forecasting. Journal of Hydrology, v. 72, n. 1/2, p. 25-55, Apr. 1984.
26. PINTO, Nelson L. de S. et al. Hidrologia básica. São Paulo : E. Blucher, 1976. 278 p.
27. TODINI, E., O'CONNELL, P. E., JONES, D. A. Basic methodology: Kalman filter estimation problems. In: O'CONNELL, P. E. Real-time hydrological forecasting and control. London : NERC, 1980. p. 66-98. Proceedings of 1st International Workshop, Institute of Hydrology, 1977.
28. WOOD, E. F., SZOLLOSI-NAGY, A. An adaptive algorithm for analyzing short-term structural and parameter changes in hydrologic prediction models. Water Resources Research, v. 14, n. 4, p. 577-581, Aug. 1978.